

# 画像メディア工学特論(8)

カメラの幾何学

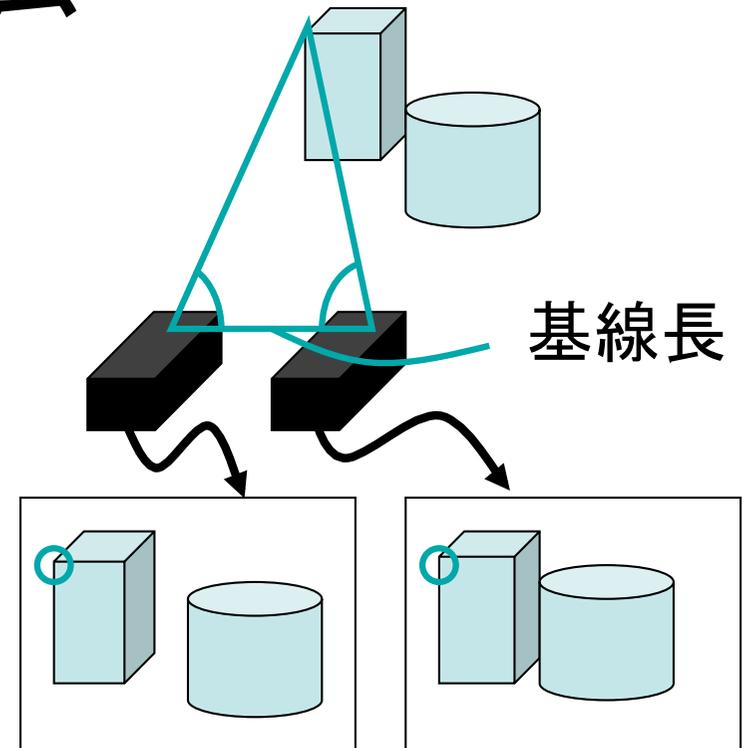
# 今回の内容

- カメラの幾何学
  - 3次元空間と2次元画像の関係
  - カメラの数式表現
  - カメラの各パラメータの推定（キャリブレーション）

# ステレオ法

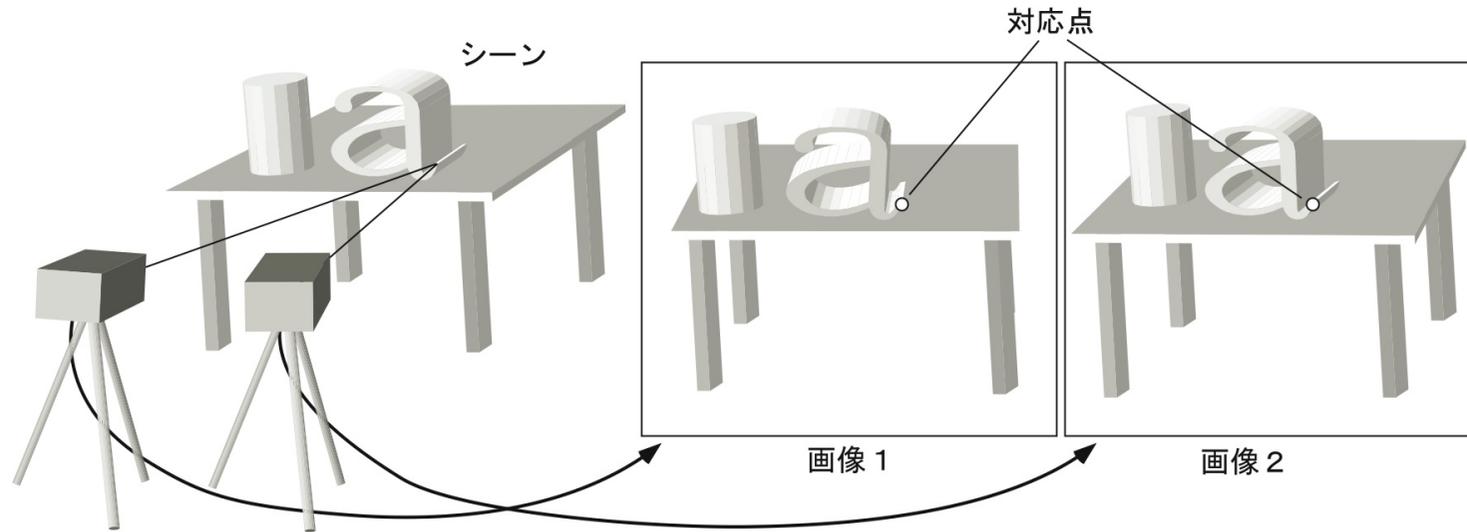
- ステレオ計測

- 二つ以上の視点を使用  
(人間の両目に相当)
- 左右の画像の「ずれ」を利用  
(三角測量法)
- 太陽光・室内照明などが  
必要
- テクスチャのない平坦な部分の距離計測が困難  
例: 真っ白な壁や滑らかで曲面的な物体
- 実質的な空間分解能が低い
- 対応点探索の計算量が大きい・安定度が低い



→ハードウェアによる高速化・多眼による安定化

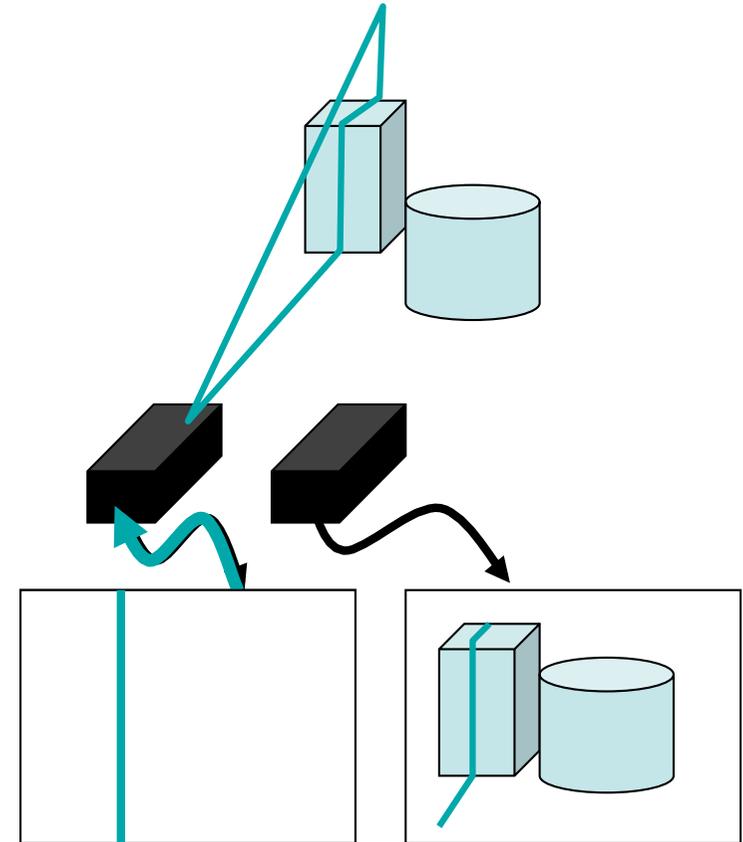
# ステレオ法



- 左右の画像間で対応点を探す必要あり
  - 平坦な部分では形状計測不可
  - 対応点探索の計算量が大きい

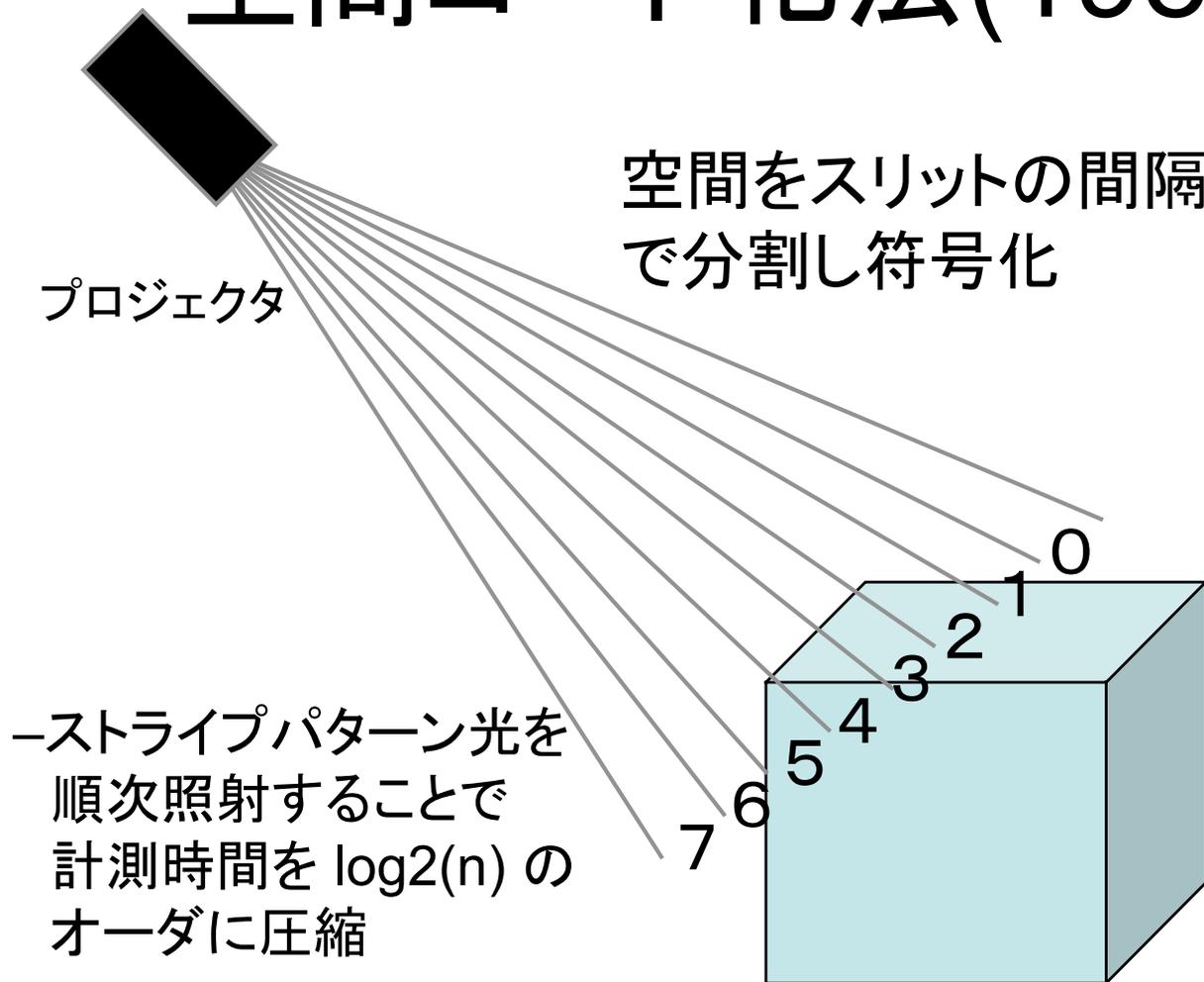
# 能動型ステレオ法

- 一方のカメラをプロジェクタに置き換える(光を投影)
  - もう一方のカメラでその光パターンの像を計測
    - 対応付け問題が簡単に
  - 模様のない物体でも計測可能
  - パターン光を投影しながら画像を取り込む
    - 画像の取り込み回数が多く、時間がかかる



→ハードウェアによる高速化・投影光の工夫等

# 空間コード化法(1985)



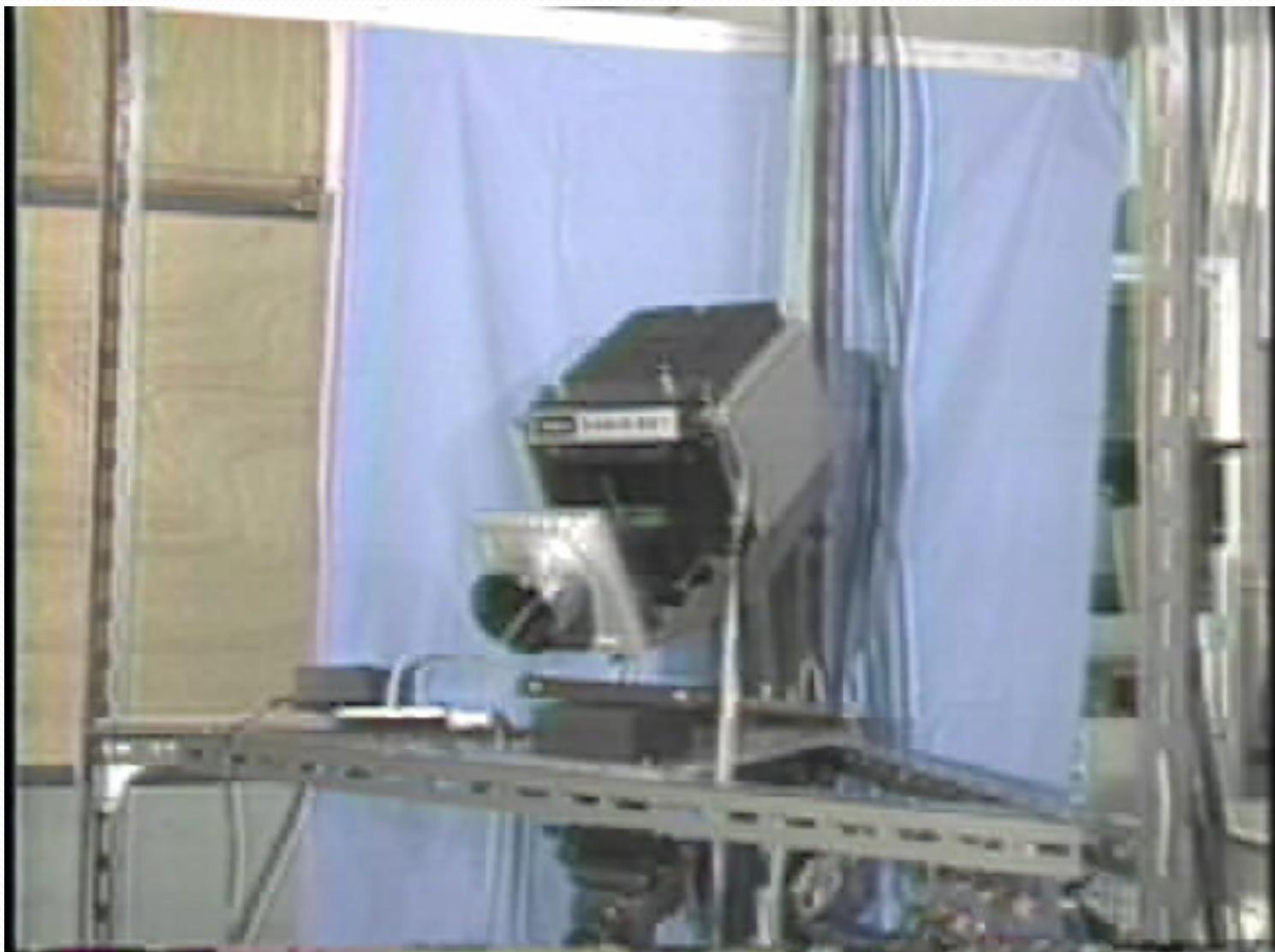
- 佐藤宏介, 井口征士, "空間コード化による距離画像入力", 信学論, Vol. J68-D, No. 3, pp. 369-375, 1985.
- 佐藤宏介, 井口征士, "液晶レンジファインダー—液晶シャッタによる高速距離画像計測システム—", 信学論, Vol. J71-D, No. 7, pp. 1249-1257, 1988.

グレイコード				
0	0	0	0	000
1	0	0	1	001
2	0	1	1	011
3	0	1	0	010
4	1	1	0	110
5	1	1	1	111
6	1	0	1	101
7	1	0	0	100

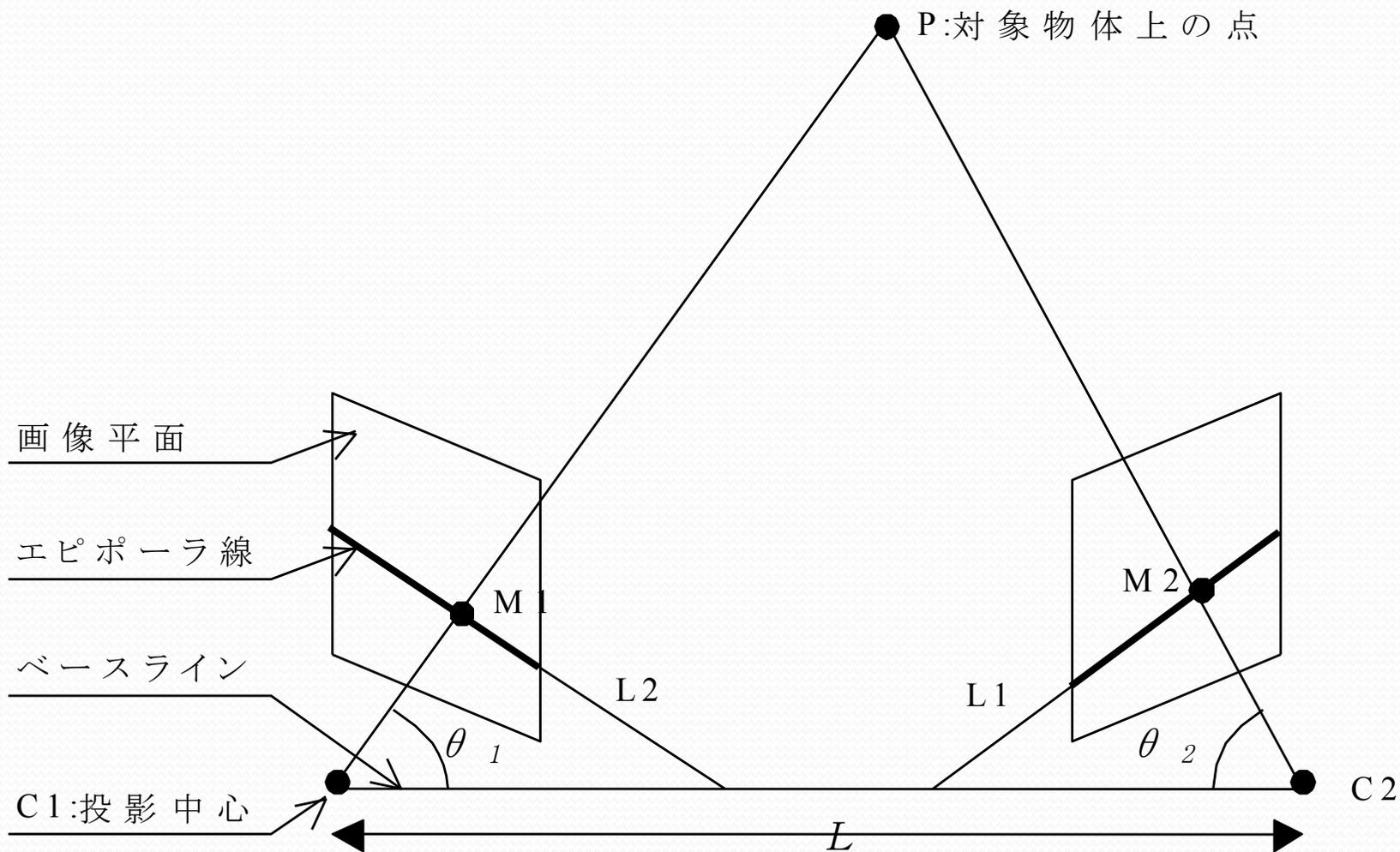
二進コード				
0	0	0	0	000
1	0	0	1	001
2	0	1	0	010
3	0	1	1	011
4	1	0	0	100
5	1	0	1	101
6	1	1	0	110
7	1	1	1	111

# 液晶レンジファインダ



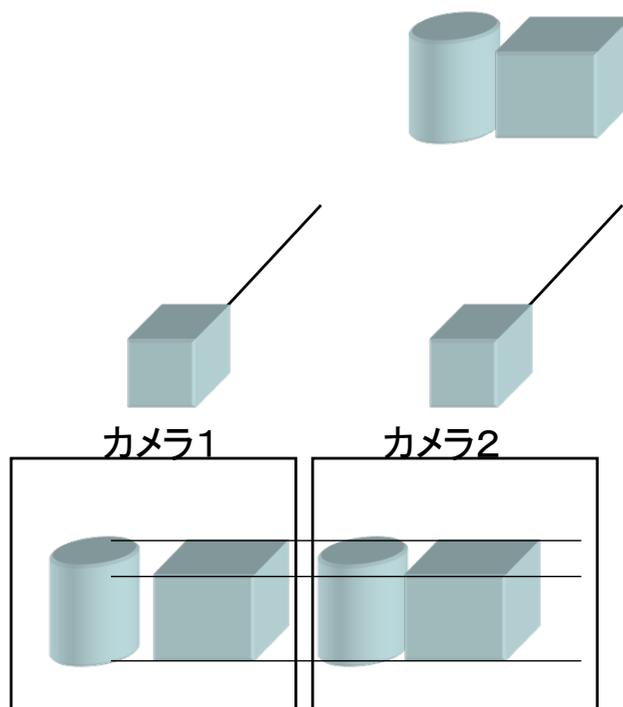
- 専用（スリット型）液晶パネルを開発

# エピポラ幾何



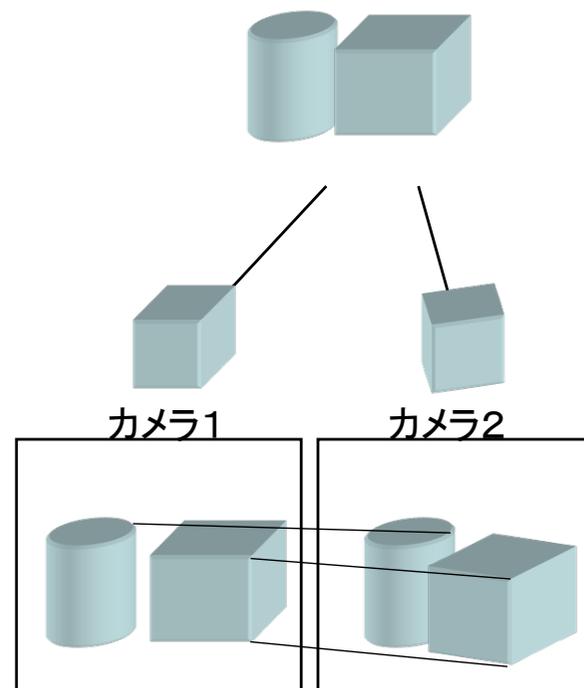
# カメラの配置と画像処理

光軸が並行な場合



- × 視野の共通領域が狭い
- エピポーラ線が平行

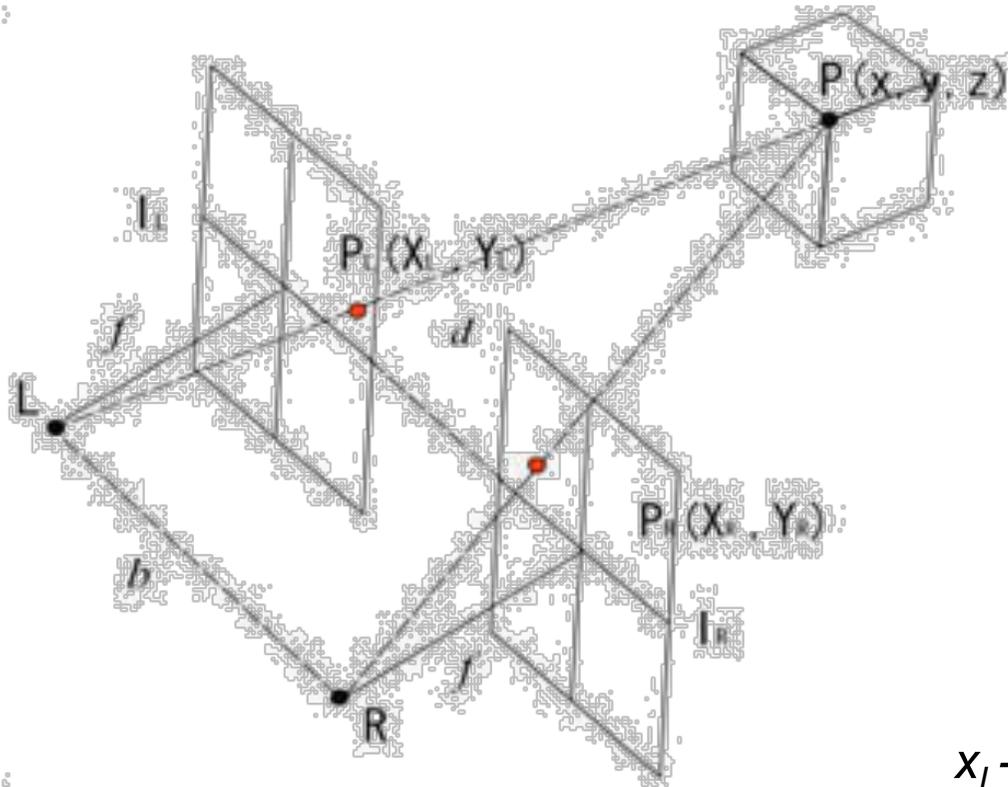
光軸が並行でない場合



- × エピポーラ線が放射状
- 画像処理で解決可

# ステレオマッチング

左右画像の特徴点位置から以下の関係が成り立つ



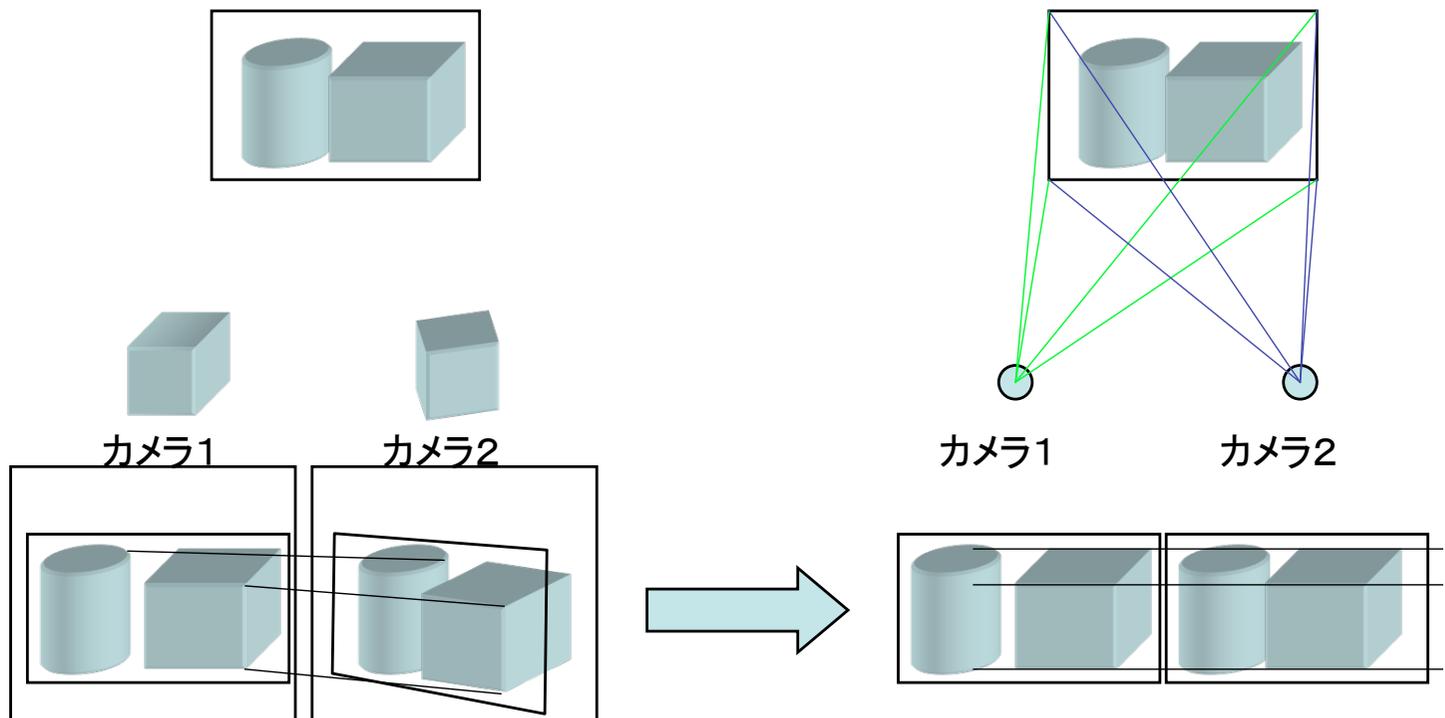
$$x = \frac{x_L + x_R}{2} \frac{L}{x_L - x_R}$$

$$y = y_L \frac{L}{x_L - x_R}$$

$$z = f \frac{L}{x_L - x_R}$$

$x_L - x_R$  は両眼視差を表している  
(距離は視差に反比例する)

# 直変化(rectification)

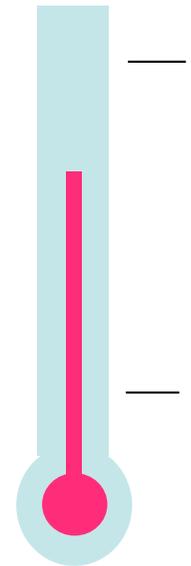


シーン中の長方形を用いて  
Homographyを計算

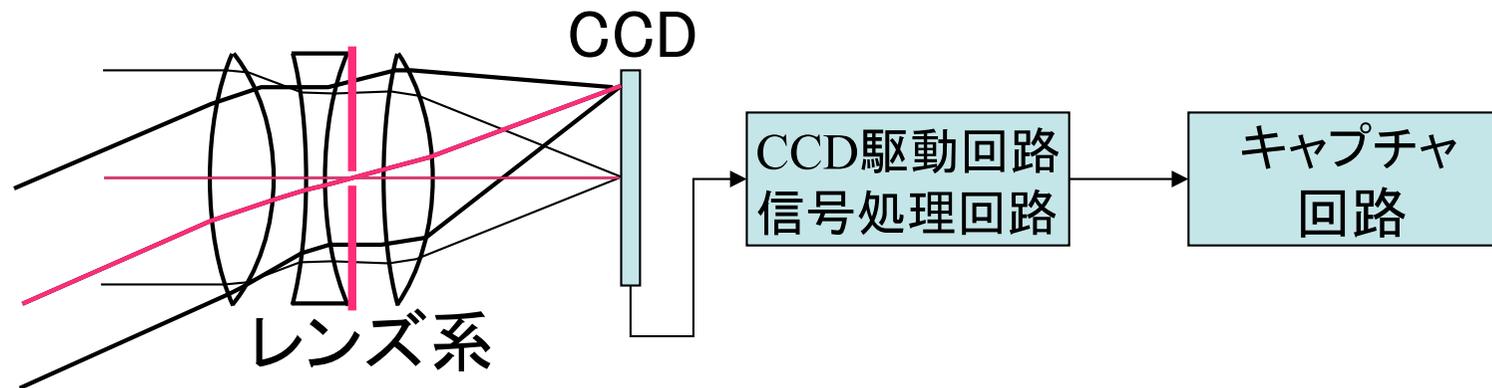
四角形が長方形になる  
ように画像を変形  
→像面が並行な2つのカメラ

# キャリブレーション

- 機器の構造からのキャリブレーションは困難
  - 実焦点距離(フォーカシング距離により可変)
  - 投影中心(レンズの中, 計測困難)
- 大きさ, 位置が既知の物体を計測してキャリブレーション
  - cf. 温度計の較正(氷水, 沸騰水)
    - 熱膨張係数の二次成分が0と仮定
  - 画像の場合も同様, レンズ歪みなどをモデリングするか?(モデルを複雑にするほど較正は困難)

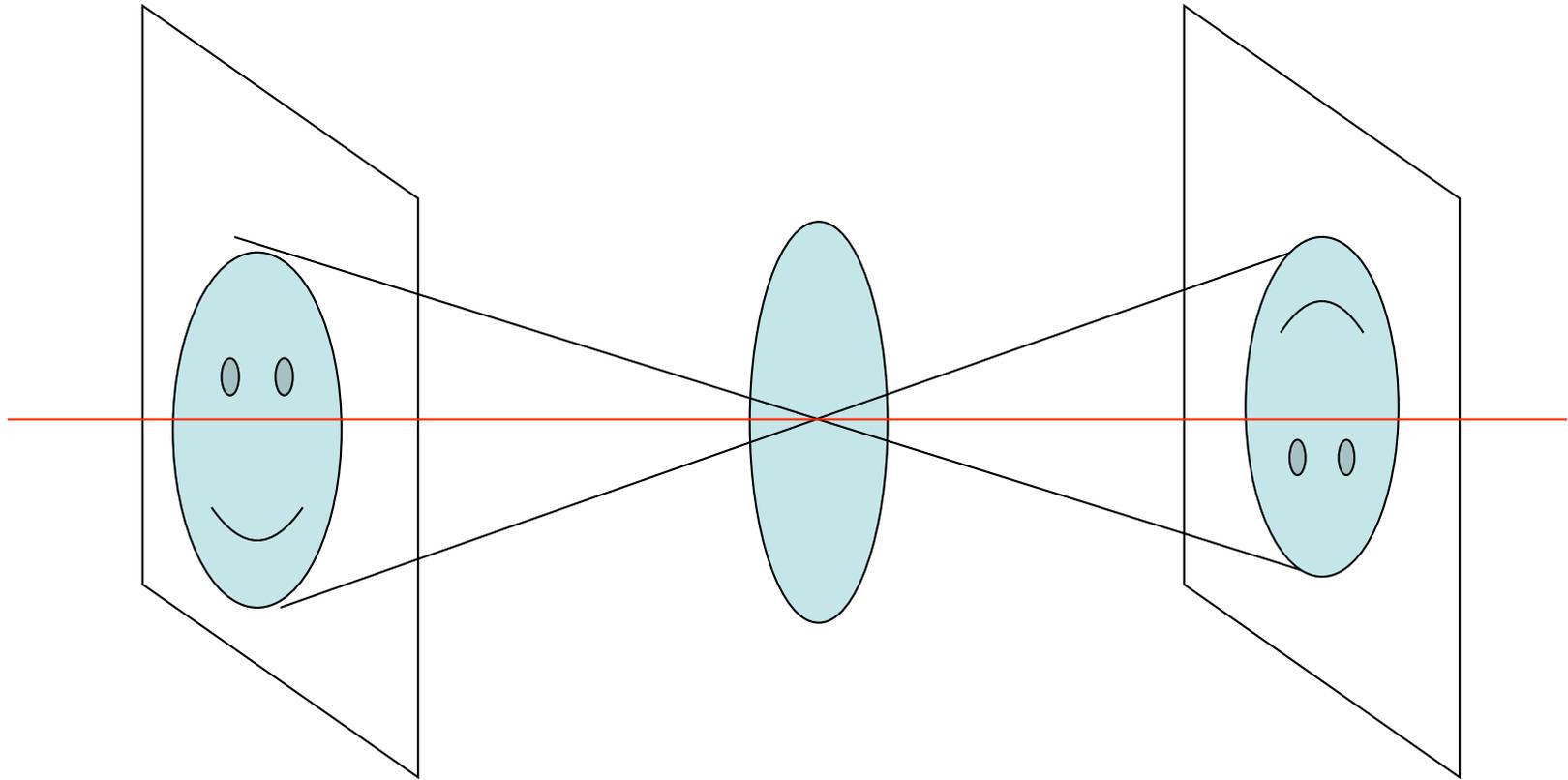


# カメラの構造



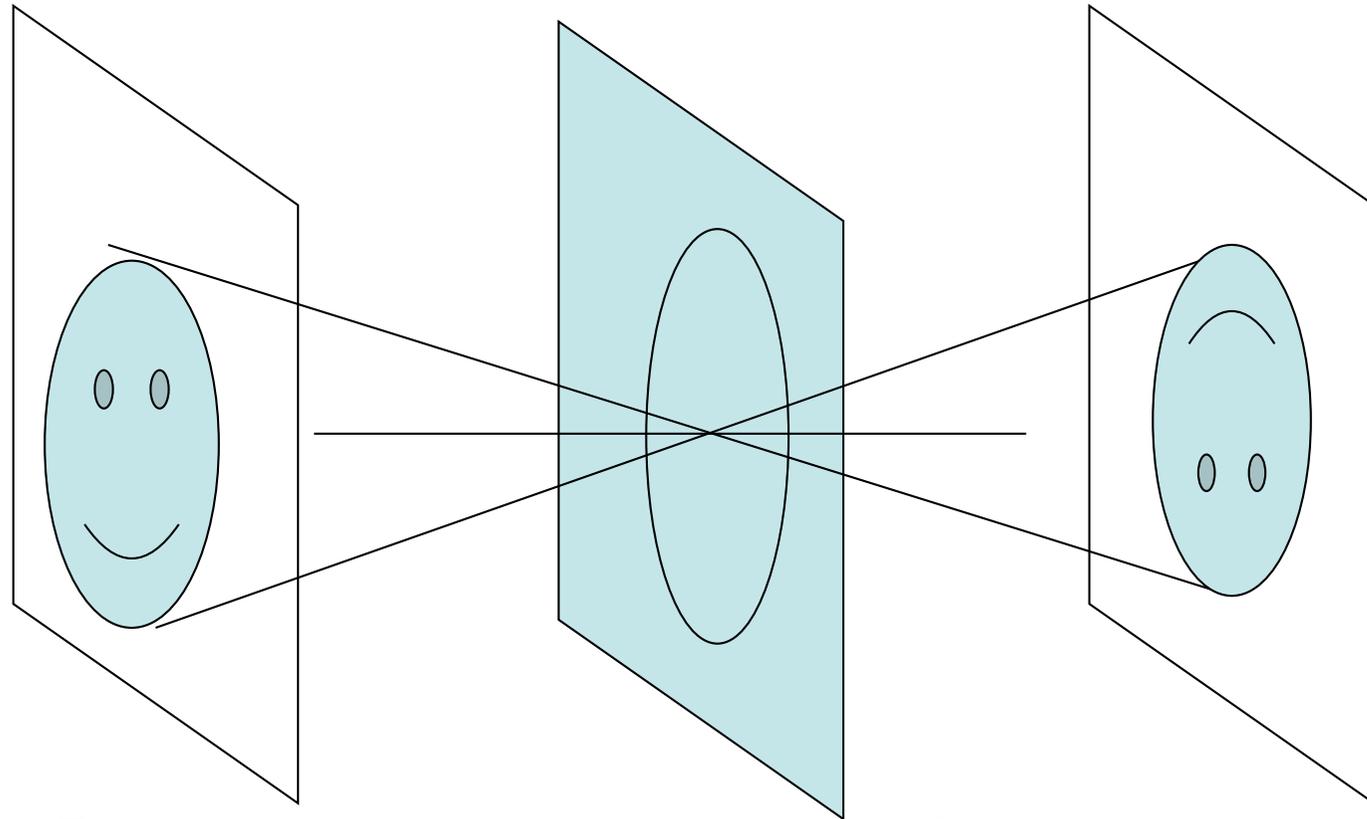
- レンズ - 集光するためのデバイス
  - 画像のぼけを無視した場合, 無関係
  - 絞りを閉じた系で考える(主光線)

# 理想的な画像センサとは



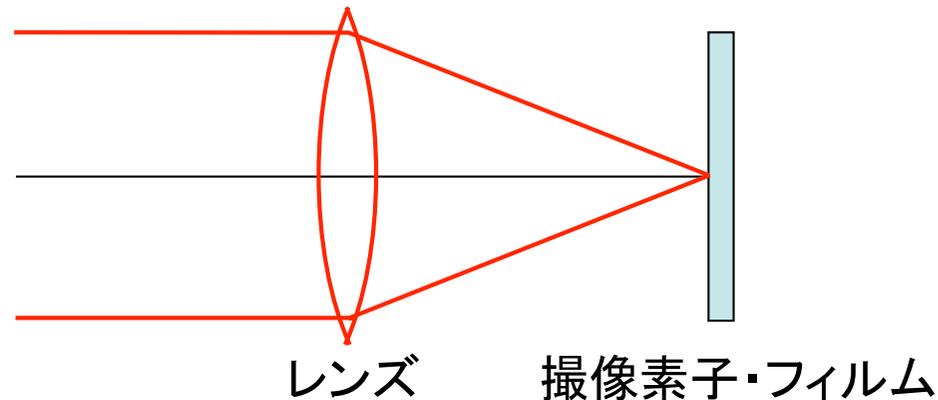
- 光軸(レンズの対称軸)に垂直な平面上の図形に対して,  
相似の像が得られること
  - ゆがみがあってはいけない
  - ぼけがあってはいけない

# ピンホールカメラ



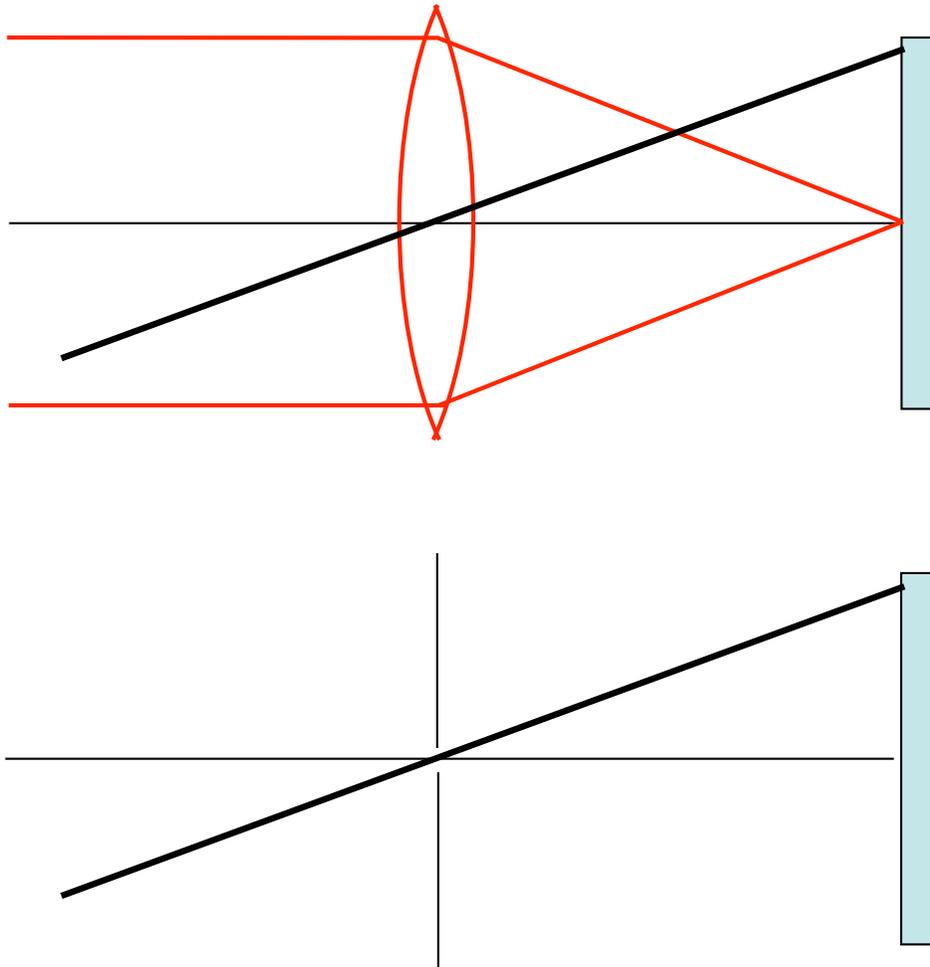
- 小さな「針穴」を通して像が出来る
  - 被写体と像の間には厳密な幾何学的関係が成立している(光の直進性より)
  - 実際には像が暗すぎてほとんど使われない

# レンズの役割



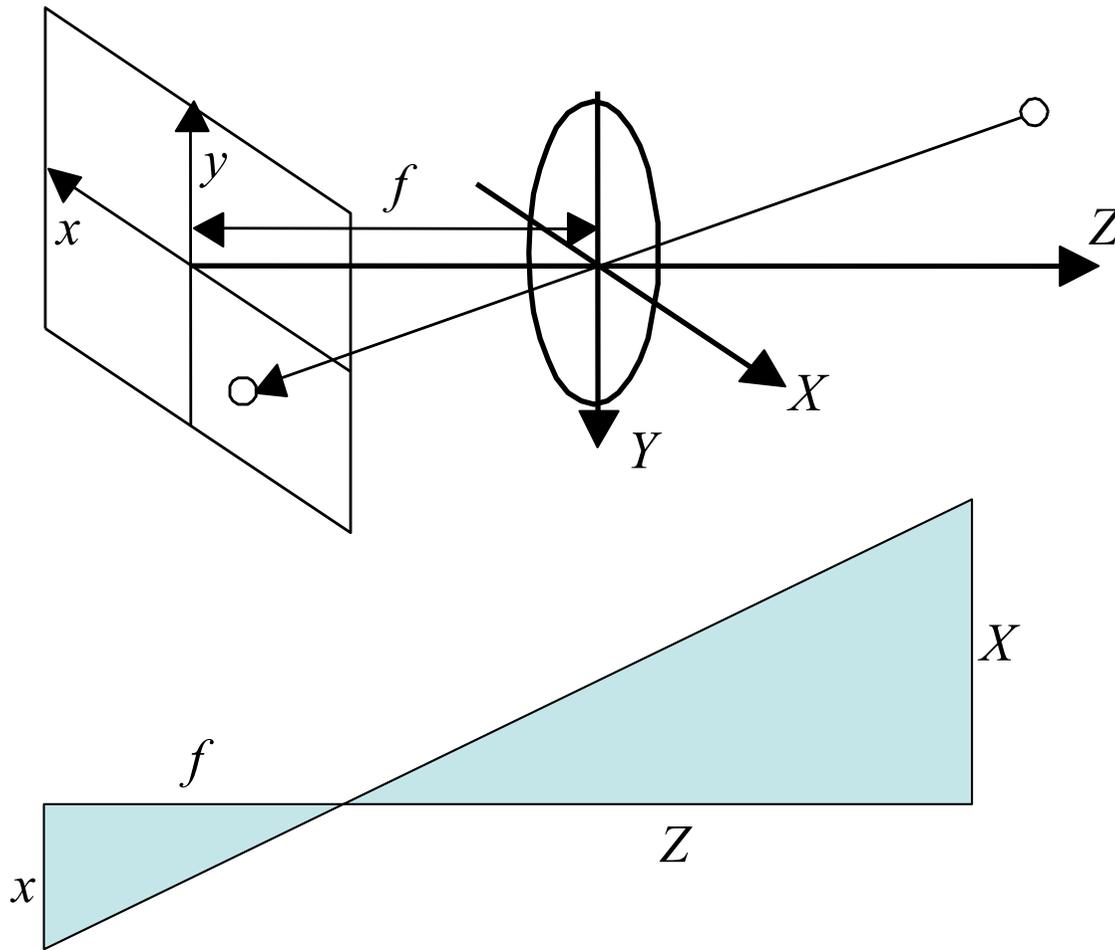
- 撮影に十分な量の光を撮像素子に集める
- 画像処理ではほとんどの場合、カメラの特性は出来るだけピンホールカメラに近いほうが良い
  - 図形が歪まない・像が甘くならない
    - 単純な1枚のレンズでは実現できない
  - ボケが生じない(光量確保に相反する要求)

# ピンホールカメラ



- 薄いレンズの中央を通る光は屈折されない
- レンズを絞り込んでいくとピンホールカメラに近づく

# ピンホールカメラ



- ピンホール中央  
(=前側レンズ主点)  
に原点を取る

$$\begin{cases} x = f \frac{X}{Z} \\ y = f \frac{Y}{Z} \end{cases}$$

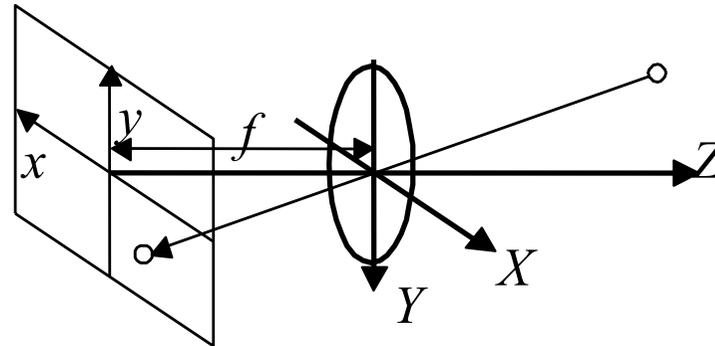
# 透視変換の同次座標表現

$$\begin{cases} x = f \frac{X}{Z} \\ y = f \frac{Y}{Z} \end{cases} \iff h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 透視変換には除算が含まれる
  - 除算だけを最後まで「延期」して計算  
(最後に  $h$  を消去)  
→ 行列計算により透視変換を表現
  - 各ベクトルの末尾に要素 “1” を追加する  
(同次座標表現)

# 透視変換に対する座標変換の導入

$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



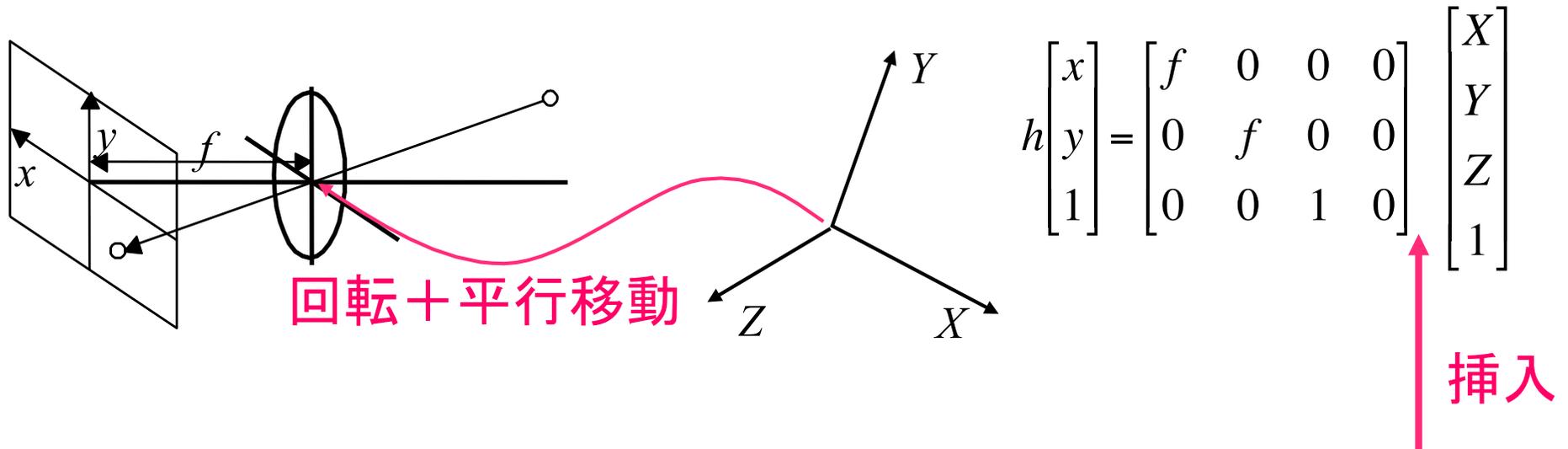
- 上記の透視変換表現は様々な制限を有する
  - 世界座標の原点 = 投影中心 (レンズ主点)
  - 光軸 = Z軸に平行
  - 画像の中心 = 投影中心から下ろした垂線の足
  - アスペクト比 = 1.0
    - 座標変換を導入する必要あり

# 同次座標を用いた平行移動の表現

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 同次座標では積により平行移動が表現可能
  - $r_{11} \sim r_{22} \rightarrow$  一次変換
  - $t_x \sim t_y \rightarrow$  平行移動

# 世界座標系の導入



- 透視変換行列と世界座標の間に、同次座標変換を挿入

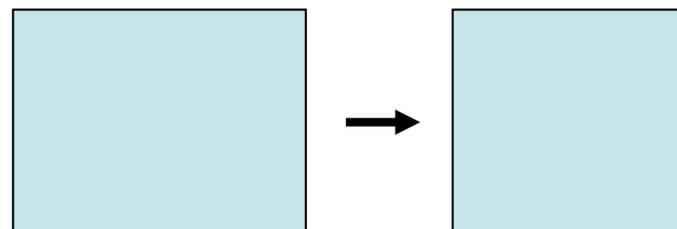
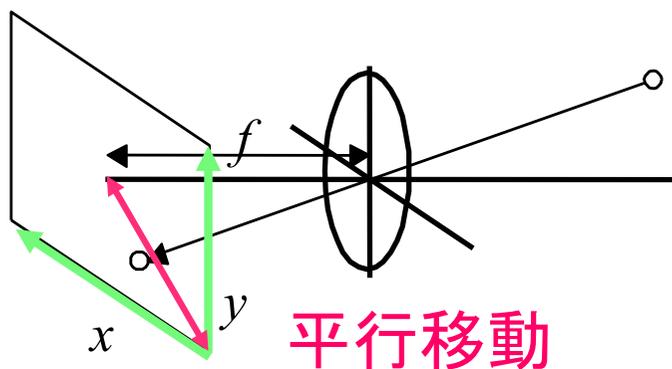
- 外部パラメータ
  - 回転: 3自由度
  - 平行移動: 3自由度

外部パラメータは、全部で6自由度！

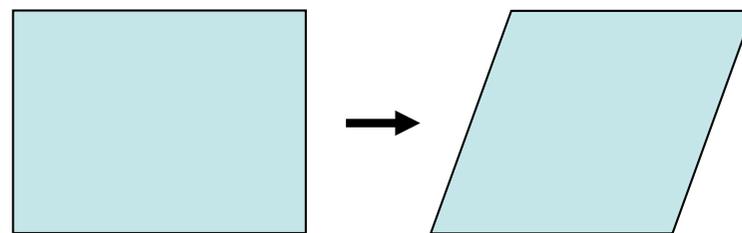
$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

外部パラメータ

# 内部パラメータの表現



アスペクト比



スキュー

- 内部パラメータ

- 焦点距離  $f$  (1自由度)
- 画像中心 (2自由度)
- アスペクト比 (1自由度)
- スキュー歪み (1自由度)

内部パラメータは、  
全部で5自由度！

# 内部パラメータの導入

- 内部パラメータは、透視変換行列の前に同次座標変換を掛ける

–  $a$  : アスペクト比

–  $s$  : スキュー比

–  $t_x, t_y$  : 画像中心

$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

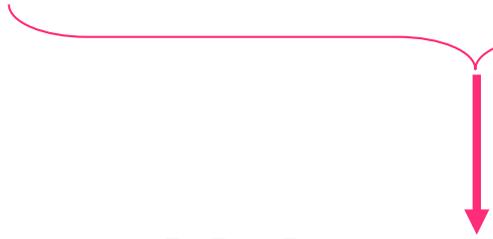
挿入

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_x \\ s & a & t_y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

内部パラメータ

# カメラパラメータ行列

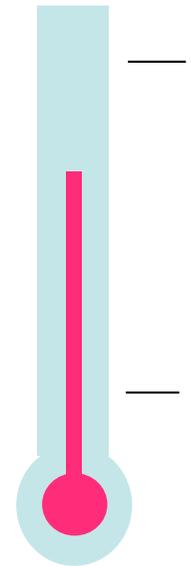
$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ s & a & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$


$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

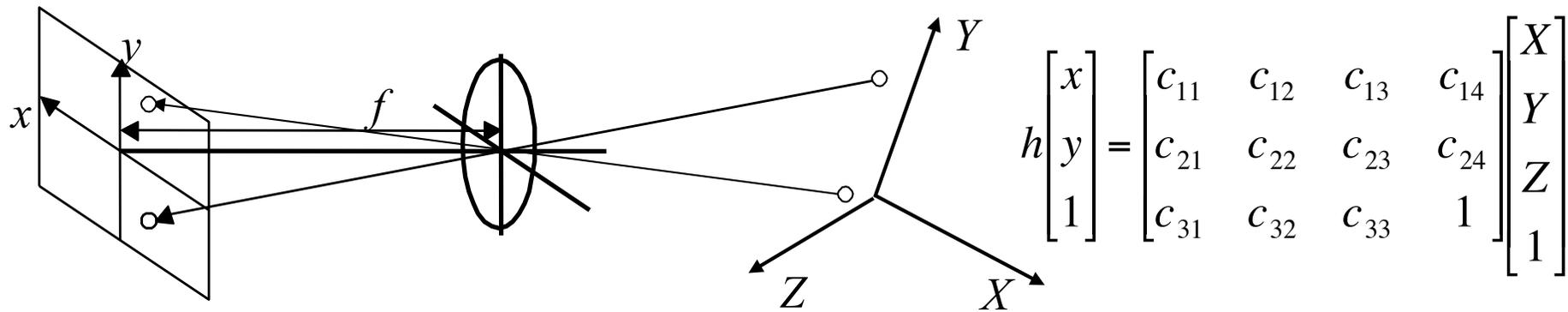
- 行列の積をあらかじめ計算
  - 3行4列の行列  
カメラパラメータ
  - パラメータ数  
(自由度)は**11**  
→カメラパラメータ  
行列は定数倍しても意味が不変

# キャリブレーション

- 機器の構造からのキャリブレーションは困難
  - 実焦点距離(フォーカシング距離により可変)
  - 投影中心(レンズの中, 計測困難)
- 大きさ, 位置が既知の物体を計測してキャリブレーション
  - cf. 温度計の較正(氷水, 沸騰水)
    - 熱膨張係数の二次成分が0と仮定
  - 画像の場合も同様, レンズ歪みなどをモデリングするか?(モデルを複雑にするほど較正は困難)



# 基本的なキャリブレーション法



- 既知の  $(X, Y, Z) \rightarrow (x, y)$  の組から較正
  - カメラパラメータから  $h$  を消去

$$\begin{cases} hx = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z + c_{14} \\ hy = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z + c_{24} \\ h = c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{31}Xx + c_{32}Yx + c_{33}Zx + x = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z + c_{14} \\ c_{31}Xy + c_{32}Yy + c_{33}Zy + y = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z + c_{24} \end{cases}$$

# パラメータの計算

$$\begin{bmatrix}
 X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 & -Z_1x_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 & -Z_1y_1 \\
 \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_nx_n & -Y_nx_n & -Z_nx_n \\
 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -X_ny_n & -Y_ny_n & -Z_ny_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_{11} \\
 c_{12} \\
 c_{13} \\
 c_{14} \\
 c_{21} \\
 c_{22} \\
 c_{23} \\
 c_{24} \\
 c_{31} \\
 c_{32} \\
 c_{33}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 \vdots \\
 x_n \\
 y_n
 \end{bmatrix}$$

- 未知数 11, 式 2n (n:特徴点数)
  - 最小二乗法で解く.
  - 上式を  $Ax=y$  の形とすると

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

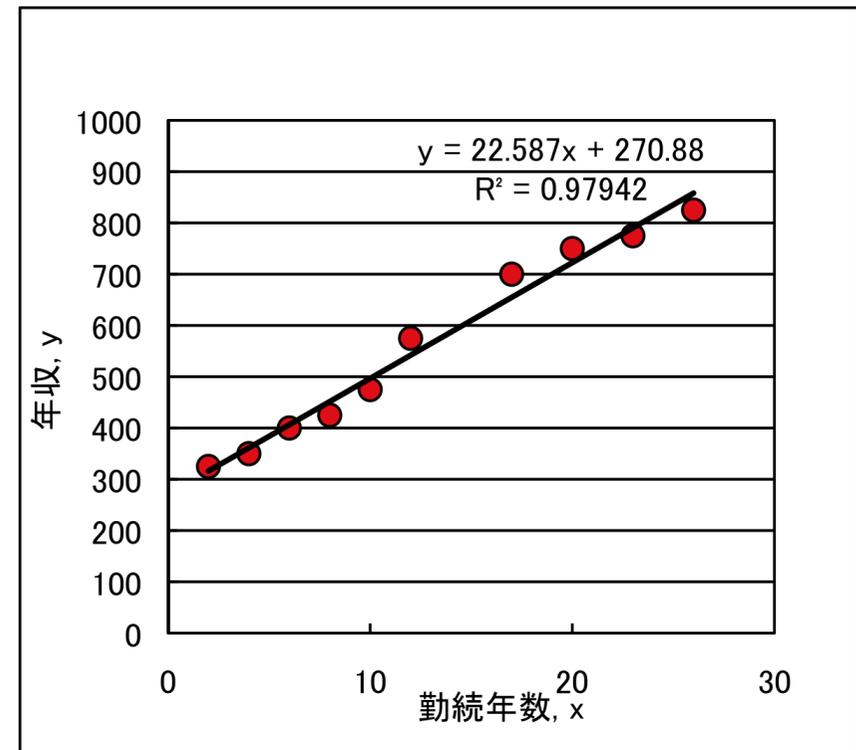
# 単回帰分析

1つの変数  $x$  から、1つの変数  $y$  を推定する。

例) 勤続年数と年収の関係を分析する。  
直線で関係式を表現する。

$$y = ax + b \quad \begin{array}{l} x : \text{説明変数} \\ y : \text{目的変数} \end{array}$$

勤続年数, $x$	年収, $y$
2	325
4	350
6	400
8	425
10	475
12	575
17	700
20	750
23	775
26	825



# 最小二乗法

- モデル, データ
  - 回帰モデル  $y = ax + b$
  - データ  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$
- 規範
  - 残差平方和  $S = \sum (y_i - ax_i - b)^2$  を最小にする
- 算法
  - $S$  は  $a, b$  の二次式なので,  $dS/da=0, dS/db=0$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -\sum_{i=1}^N 2(y_i x_i - ax_i^2 - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = -\sum_{i=1}^N 2(y_i - ax_i - b) = 0$$

# 最小二乗法の行列解法

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i x_i &= a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N y_i &= a \sum_{i=1}^N x_i + b \sum_{i=1}^N 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i x_i \\ \sum_{i=1}^N y_i \end{bmatrix}$$

$$ax_i + b = y_i$$

共分散行列

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

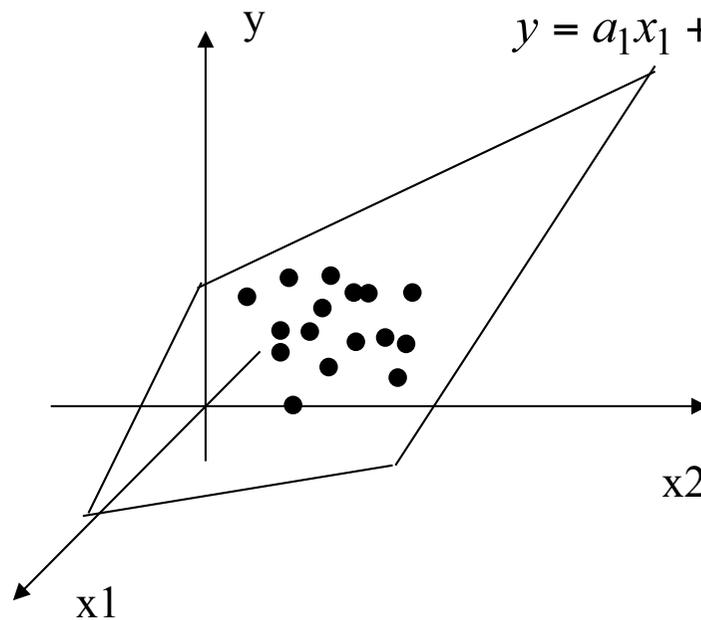
$$\Rightarrow X = \underbrace{(A^T A)^{-1}}_{A \text{ の擬似逆行列}} A^T B$$

$$AX = B$$

# 重回帰分析

2つ以上の変数  $x_1, x_2, \dots$  から, 1つの変数  $y$  を推定する.

例) 最低気温 ( $y$ ) と緯度 ( $x_1$ ), 標高 ( $x_2$ ) の関係



各地のデータ (サンプル) から回帰係数  $a_1, a_2, a_3$  を決定する.

# 線形回帰分析

- 線形な例

- $y = ax + b$

- $y = ax^2 + bx + c$

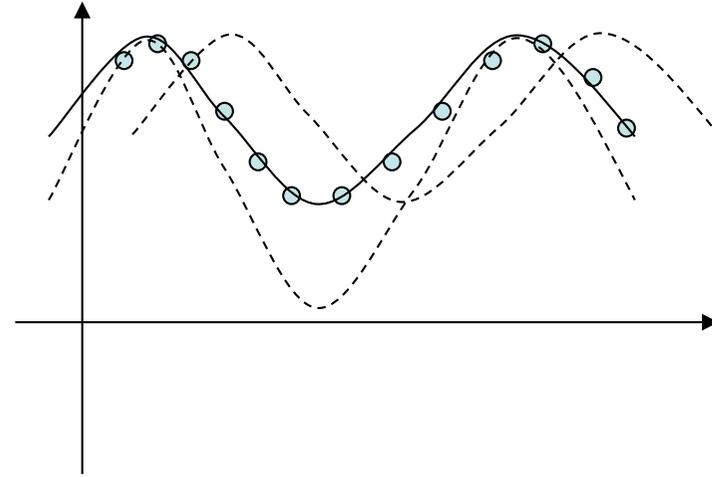
- $z = ax + by + c$

- $y = a \sin(\theta + b) + c = a \sin \theta \cos b + \cos \theta \sin b + c$

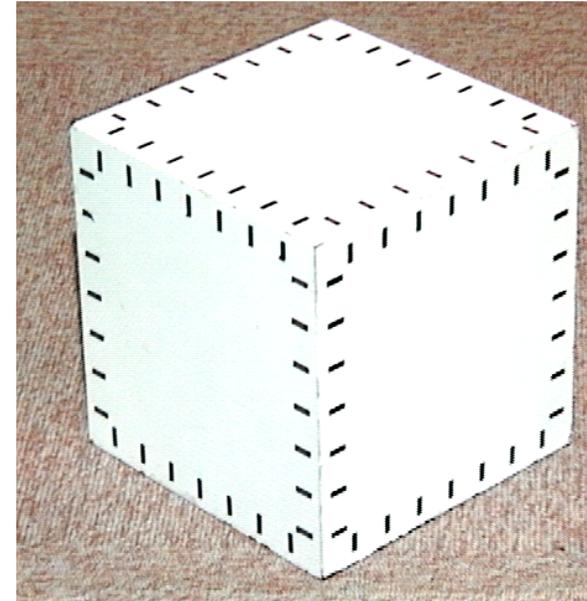
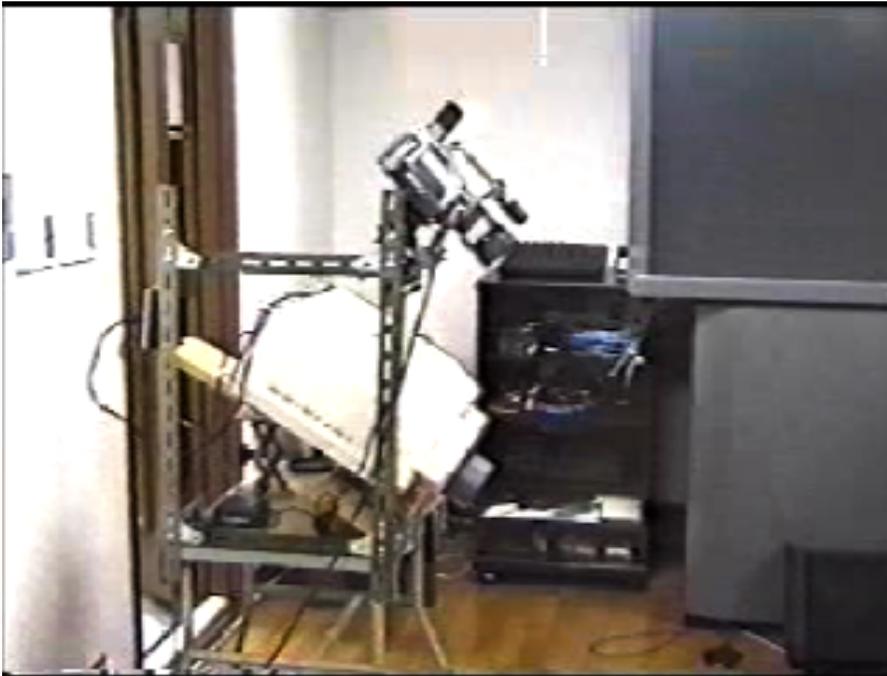
- 非線形な例

- $y = \sin(ax) + b$

- 非線形最適化によりパラメータを出す。  
最急降下法, GA, SA, . . .



# キャリブレーションの実際



キャリブレーションに用いる  
対象物体(一辺16cm)

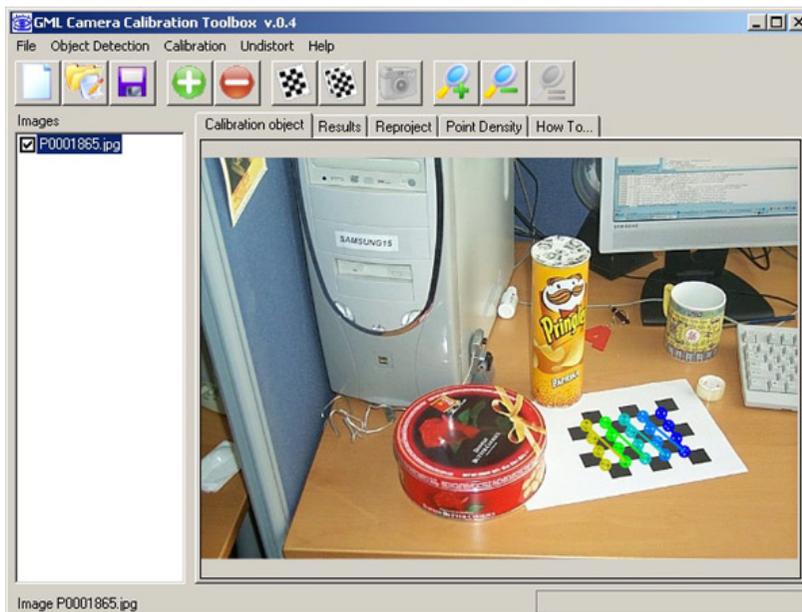
# バンドル調整

$$\begin{cases} hx = c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z + c_{14} \\ hy = c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z + c_{24} \\ h = c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z + 1 \end{cases} \rightarrow \arg \min_{c_{11}-c_{33}} \sum_n \left( \begin{bmatrix} \frac{c_{11}X_n + c_{12}Y_n + c_{13}Z_n + c_{14}}{c_{31}X_n + c_{32}Y_n + c_{33}Z_n + 1} \\ \frac{c_{21}X_n + c_{22}Y_n + c_{23}Z_n + c_{24}}{c_{31}X_n + c_{32}Y_n + c_{33}Z_n + 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right)^2$$

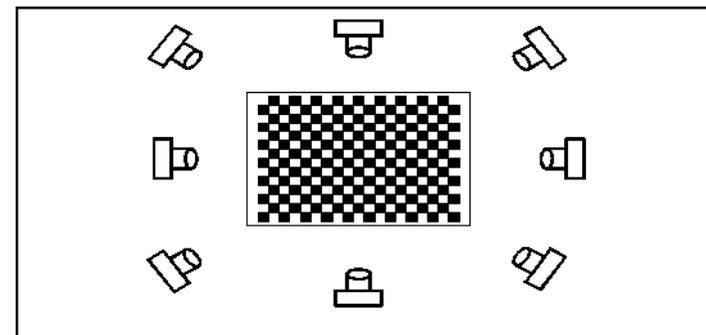
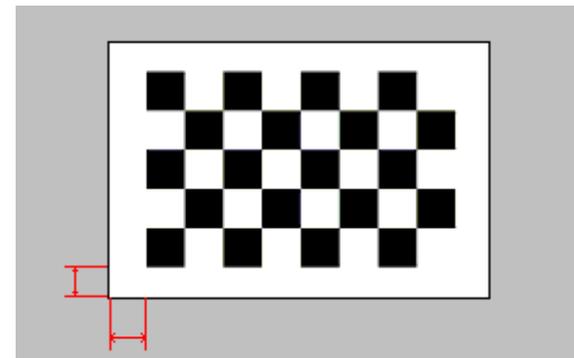
- 画像上の点の距離二乗和(再投影誤差)を最小化
  - 初期値: 線形解法
  - bundle adjustment: 非線形最適化
  - 最急降下法, マルカート法などで計算する.

# キャリブレーションツール

- Z. Y. Zhang の手法
  - OpenCV ライブラリ (Intel)
  - GML C++ Camera Calibration toolbox



Calibration date	21.10.2005 18:09:15
Square size	38.000 (mm)
Focal length	[ 2592.554 2600.251 ] ± [ 0.490 0.444 ]
Principal point	[ 1134.869 824.027 ] ± [ 0.716 0.468 ]
Distortion	[ -0.211038 0.226479 -0.001461 -0.000326 ] ± [ 0.000936 0.005006 0.000040 0.000053 ]
The camera matrix	[ 2592.554 0 1134.869; 0 2600.251 824.027; 0 0 1 ]
Pixel error	[ 0.42 0.33 ]



# Camera Calibration

- Define intrinsic and extrinsic camera parameters.
- Define Distortion parameters

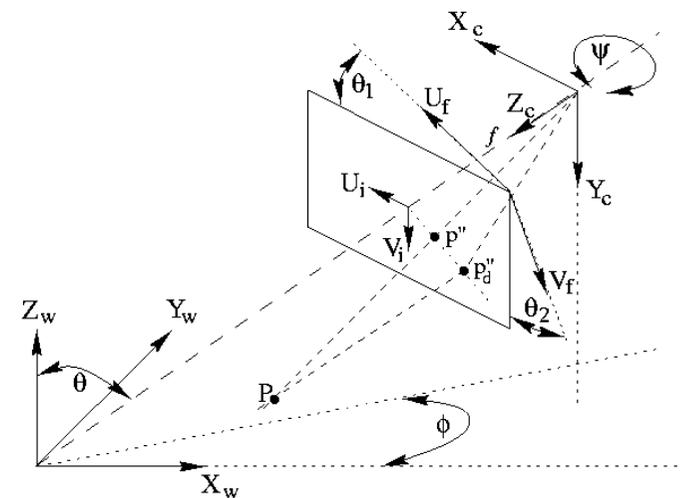
$$p = A[RT]P,$$

$$A = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \quad P = [X, Y, Z], \quad p = [u, v]$$

$$\tilde{u} = u + (u - c_x) \cdot [k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4 + 2p_1 y + p_2 (r^2 / x + 2x)],$$

$$\tilde{v} = v + (v - c_y) \cdot [k_1 \cdot r^2 + k_2 \cdot r^4 + 2p_2 x + p_1 (r^2 / y + 2y)],$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

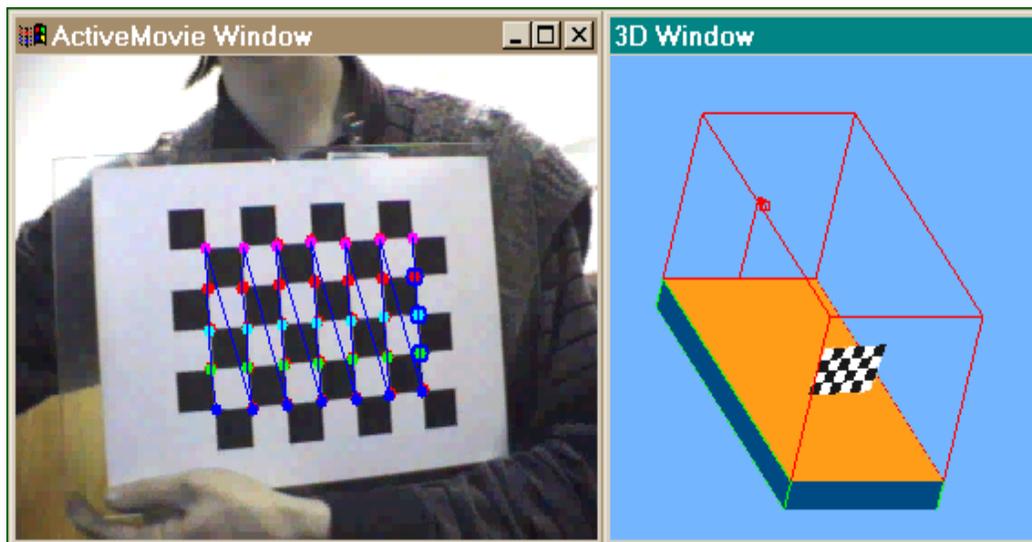


# Camera Calibration

Now, camera calibration can be done by holding checkerboard in front of the camera for a few seconds.

And after that you'll get:

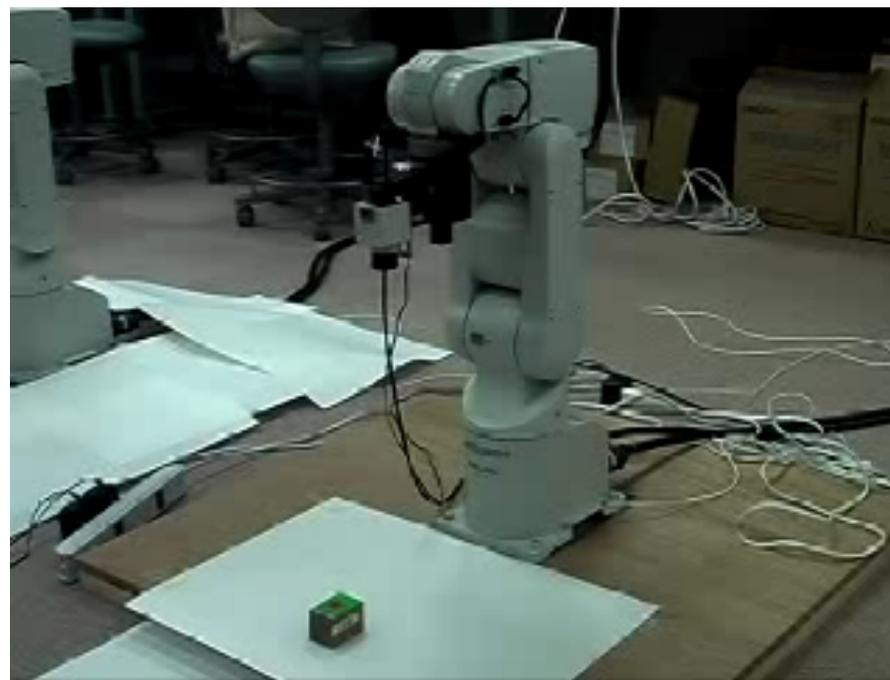
***3D view of etalon***



***Un-distorted image***



# キャリブレーション応用例



学生実験(学部4年次)での  
画像処理・ロボット応用実習風景

# カメラパラメータからの解析

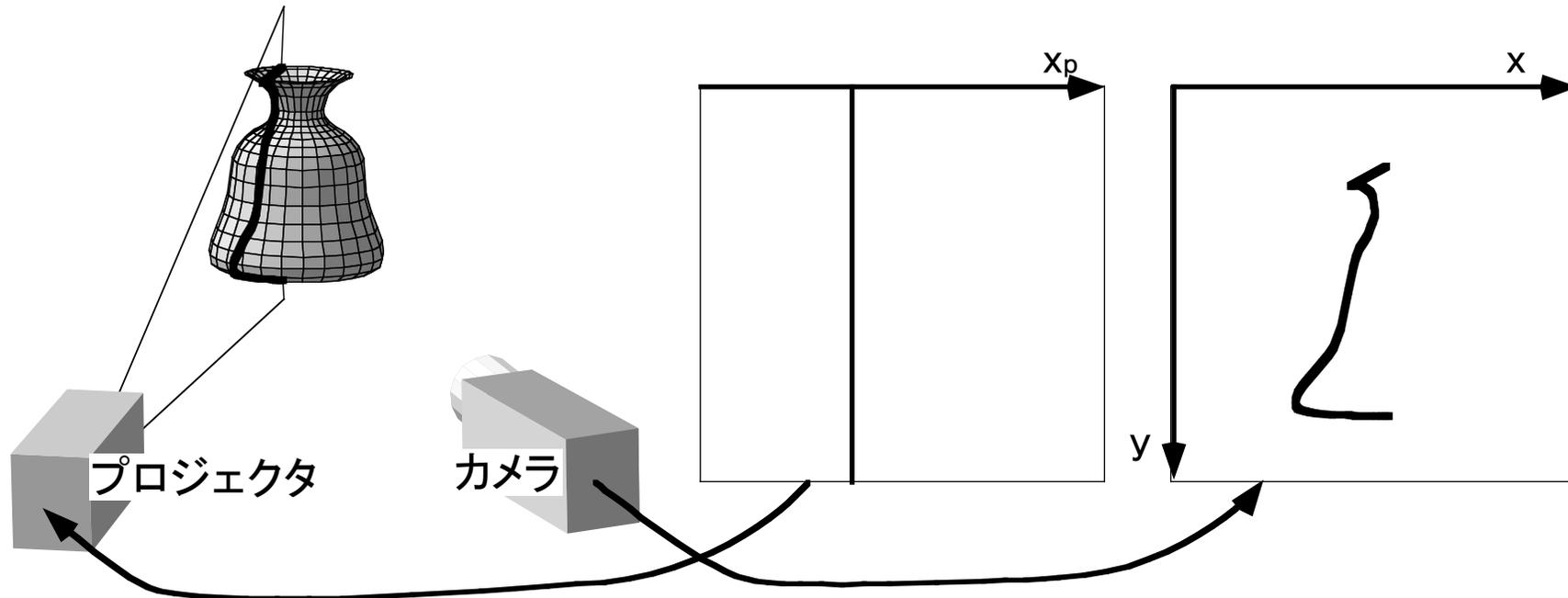
$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & s \cdot f & t_x \\ 0 & a \cdot f & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \iff h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{14} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

内部パラメータ  
上3角行列

外部パラメータ  
(左3x3)  
正規直交行列

- カメラパラメータの左3x3を直交化
  - グラム・シュミットの正規直交化法を用いる
  - 内部パラメータとカメラの姿勢が求められる
  - 平行移動成分は内部パラメータ行列の逆行列を用いて求められる

# 応用: レンジファインダ



- スリット光投影法
  - プロジェクタはカメラ同様にモデル化可能

# プロジェクタのモデル化

- スリット光プロジェクタは1次元表示デバイス
  - $y$  は任意の値をとるため,  $y$  成分を省く

$$h \begin{bmatrix} x_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- カメラと同様にキャリブレーション可能
  - どの位置のスリット光が, どの座標に到達するか

# 三次元座標の算出

- 情報: スリット番号  $x_p$ , 画素位置  $x, y$ 
  - カメラパラメータ, プロジェクタパラメータを使用

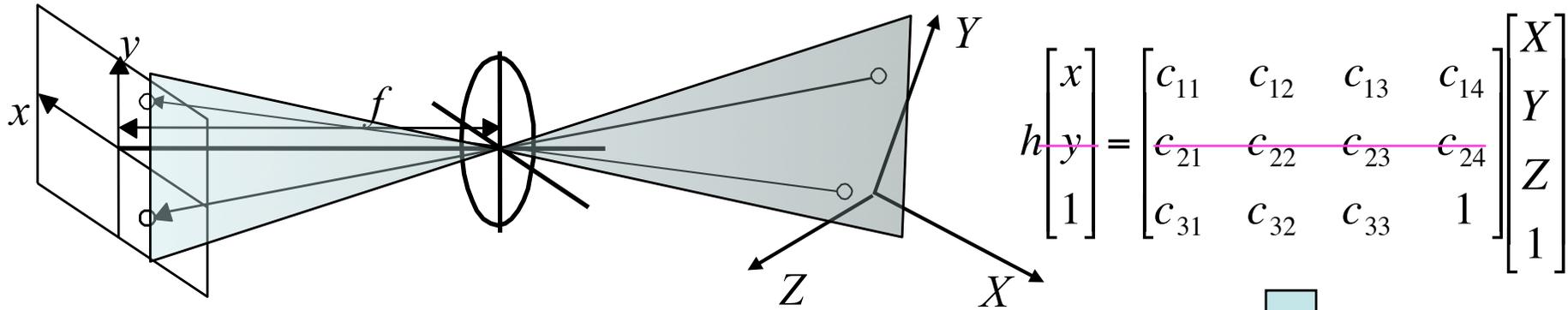
$$F = \begin{bmatrix} x \cdot c_{34} - c_{14} \\ y \cdot c_{34} - c_{24} \\ x_p \cdot p_{24} - p_{14} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} c_{11} - x \cdot c_{31} & c_{12} - x \cdot c_{32} & c_{13} - x \cdot c_{33} \\ c_{21} - y \cdot c_{31} & c_{22} - y \cdot c_{32} & c_{23} - y \cdot c_{33} \\ p_{11} - x_p \cdot p_{21} & p_{12} - x_p \cdot p_{22} & p_{13} - x_p \cdot p_{23} \end{bmatrix}$$

– より

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = Q^{-1} \cdot F$$

で座標が求められる

# カメラ2台の場合



- 一方のカメラのy座標は不要  
 - y座標の行を削除して考える

$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

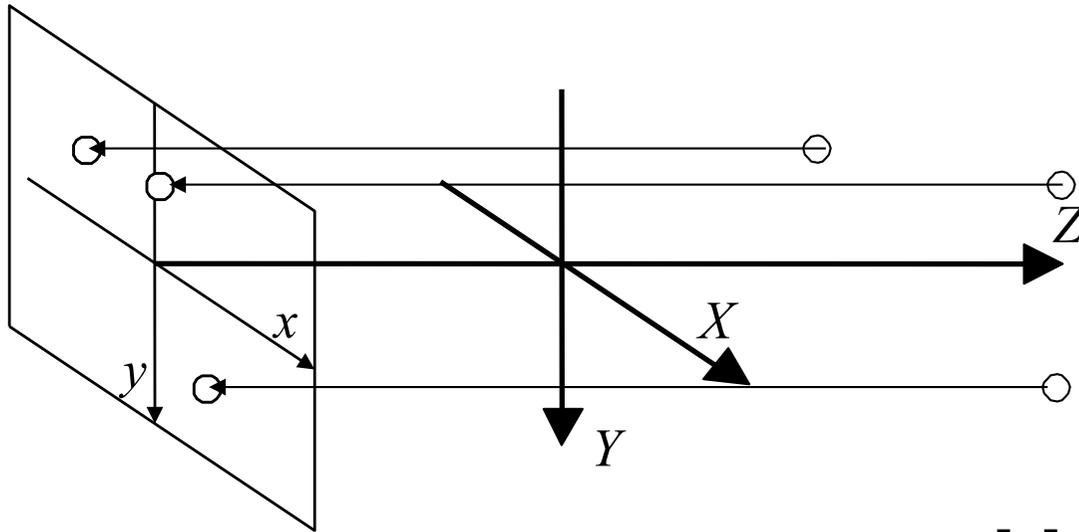
カメラ1

$$h \begin{bmatrix} x_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

カメラ2

# その他のカメラモデル

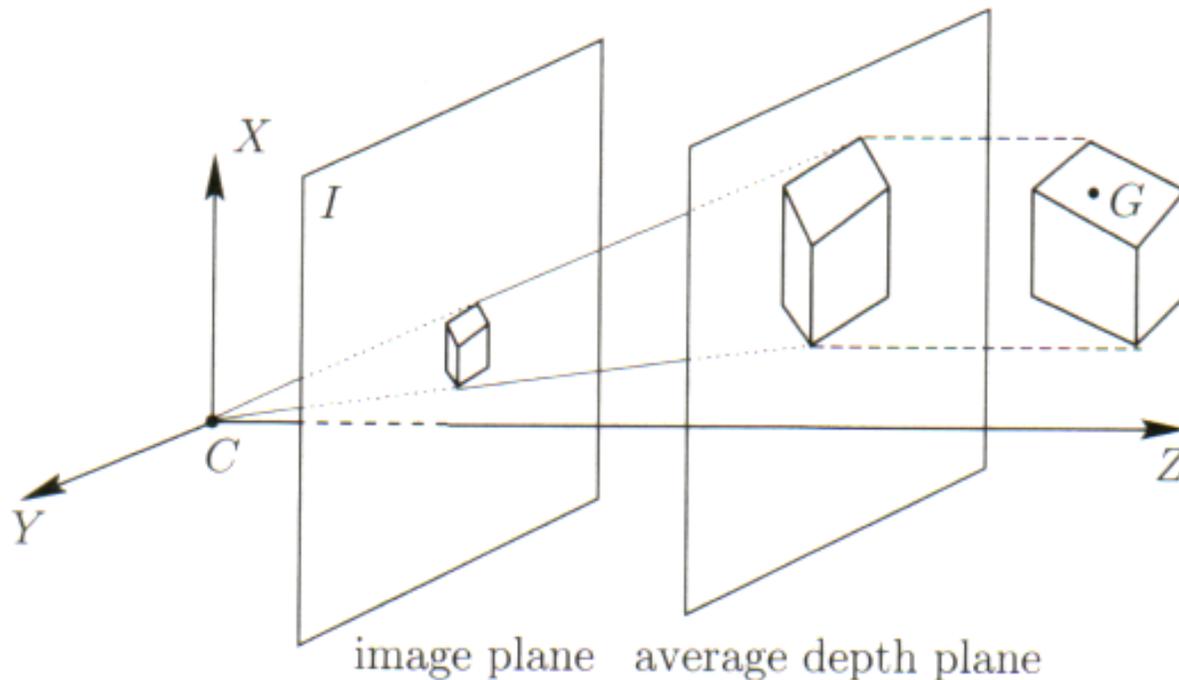
- 並行射影  $x = X, y = Y$



$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 弱中心射影

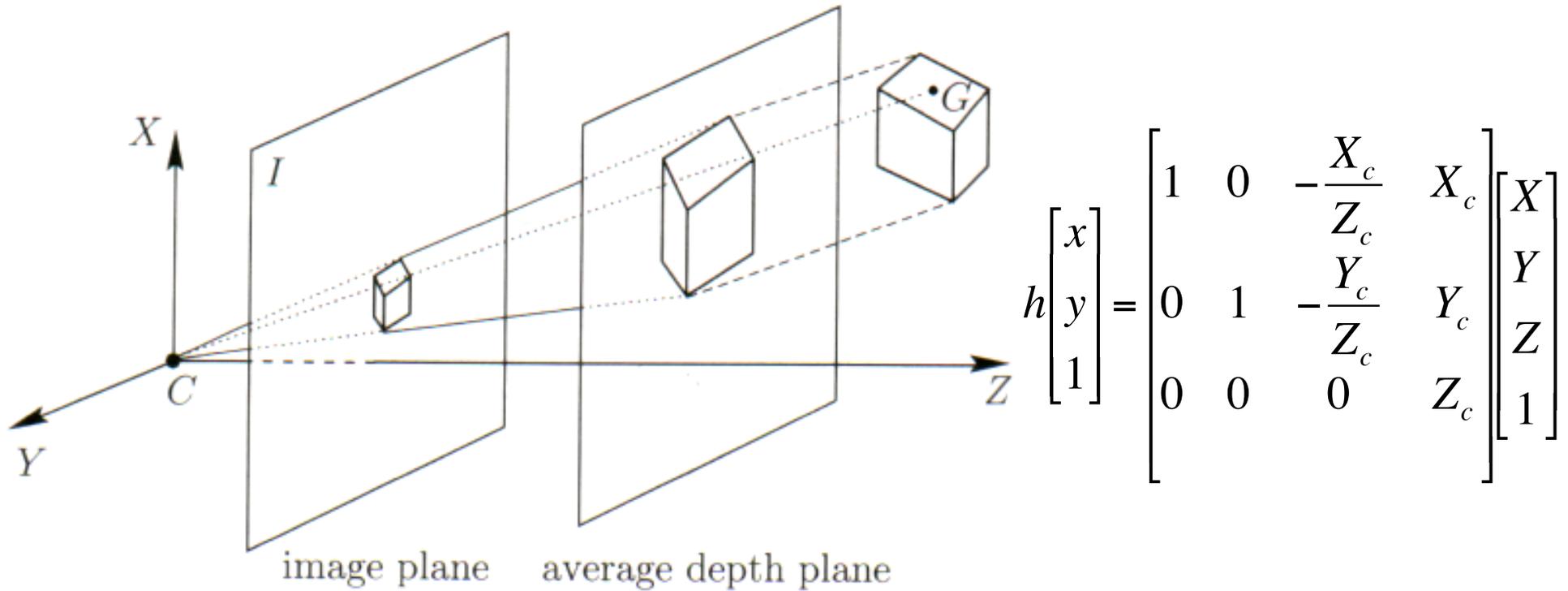
- 距離に応じて並行射影を拡大・縮小
  - 距離は代表点(重心など)で計算



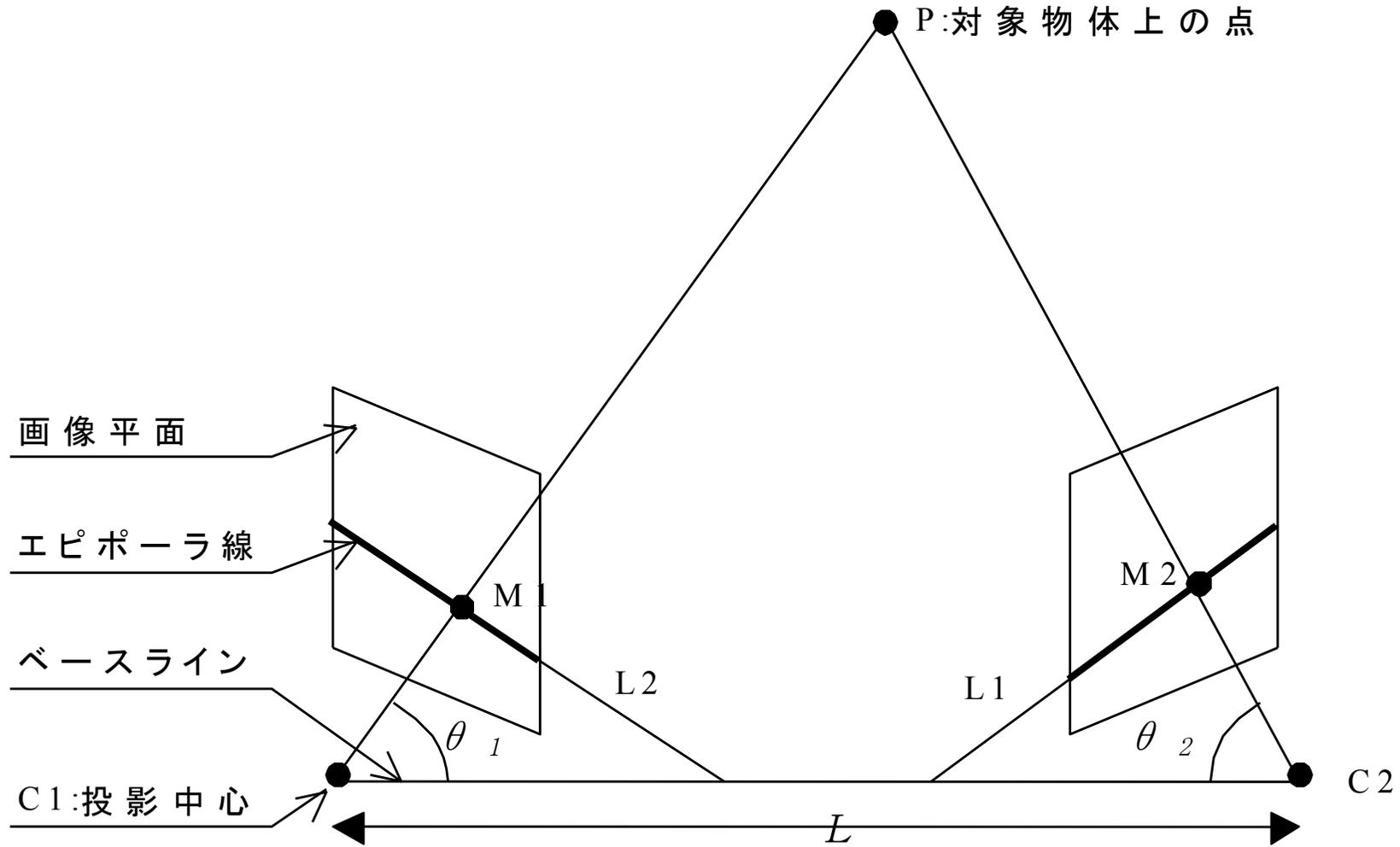
$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 擬似中心射影

- 物体の光軸からの距離も勘案



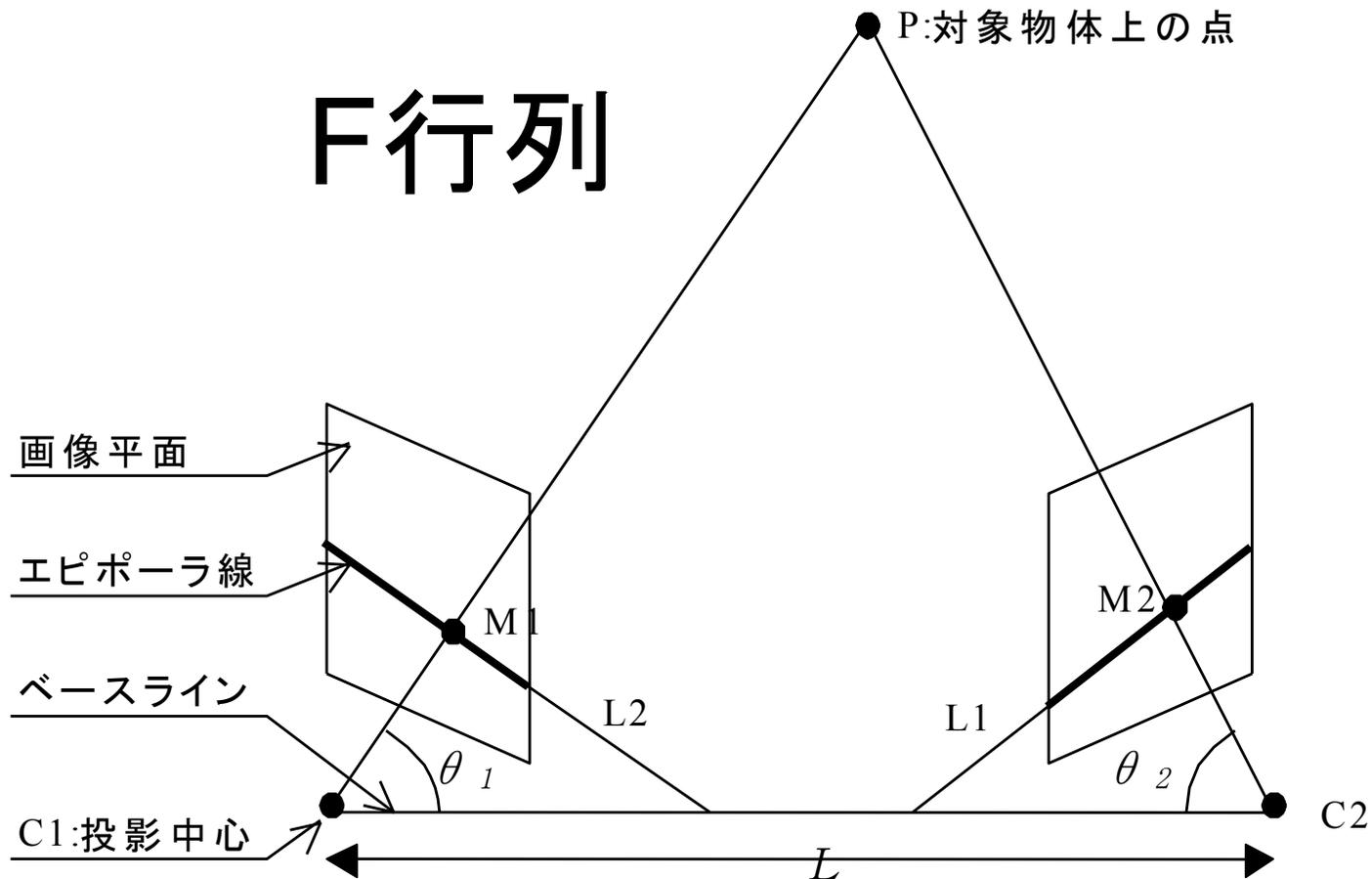
# エピポーラ幾何



# F行列

$$m_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$(x_2, y_2)$  を決めると  $ax_1 + by_1 + c = 0$   
 $(x_1, y_1)$  を決めると  $ax_2 + by_2 + c = 0$

$$m_1^T F m_2 = 0 \quad F \text{ はカメラパラメータから算出可能}$$

# 弱較正

- 世界座標系中の既知座標点はいない
  - 2台のカメラ間の点対応のみから較正
  - F行列が求められる(F行列の自由度は7)
  - 8点の対応がとれれば, F行列が容易に算出可(最小二乗法)

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

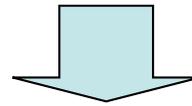
展開

$$x_1(f_{11}x_2 + f_{12}y_2 + f_{13}) + y_1(f_{21}x_2 + f_{22}y_2 + f_{23}) + f_{31}x_2 + f_{32}y_2 + 1 = 0$$

fの要素に関する線形和

# 弱校正（線形解法）

$$x_1(f_{11}x_2 + f_{12}y_2 + f_{13}) + y_1(f_{21}x_2 + f_{22}y_2 + f_{23}) + f_{31}x_2 + f_{32}y_2 + 1 = 0$$



$$\begin{bmatrix} x_{11}x_{21} & x_{11}y_{21} & x_{11} & y_{11}x_{21} & y_{11}y_{21} & y_{11} & x_{21} & y_{21} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n}x_{2n} & x_{1n}y_{2n} & x_{1n} & y_{1n}x_{2n} & y_{1n}y_{2n} & y_{1n} & x_{2n} & y_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 未知数 8, 式 n (n: 特徴点数)

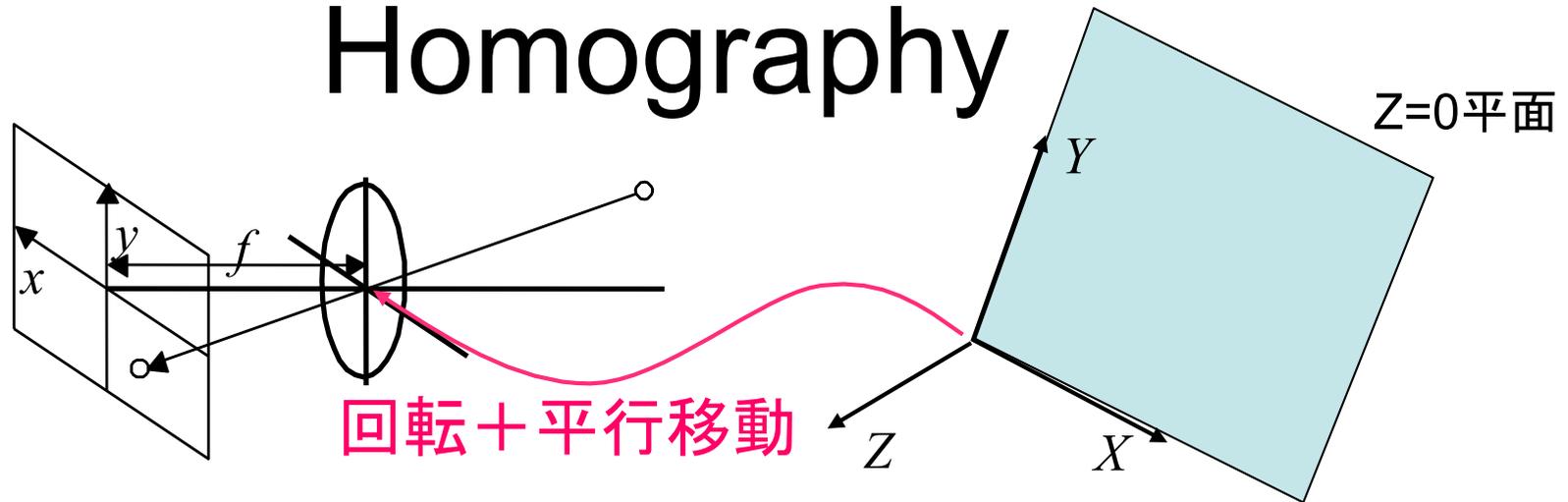
– 最小二乗法で解く.

上式を  $Ax=y$  の形とすると

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

# 平面とカメラ間の幾何学的関係:

## Homography



$$h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow h \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 平面→平面の対応関係: 3x3行列で表現可
- 未知数8: 4点の対応関係で較正可

# Homographyの計算

$$\begin{bmatrix}
 X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1x_1 & -Y_1x_1 & -Z_1x_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -X_1y_1 & -Y_1y_1 & -Z_1y_1 \\
 \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_nx_n & -Y_nx_n & -Z_nx_n \\
 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -X_ny_n & -Y_ny_n & -Z_ny_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_{11} \\
 c_{12} \\
 c_{13} \\
 c_{14} \\
 c_{21} \\
 c_{22} \\
 c_{23} \\
 c_{24} \\
 c_{31} \\
 c_{32} \\
 c_{33}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 y_1 \\
 \vdots \\
 x_n \\
 y_n
 \end{bmatrix}$$

- 未知数 8, 式  $2n$  ( $n$ : 特徴点数)
  - 最小二乗法で解く.
  - 上式を  $Ax=y$  の形とすると

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y$$

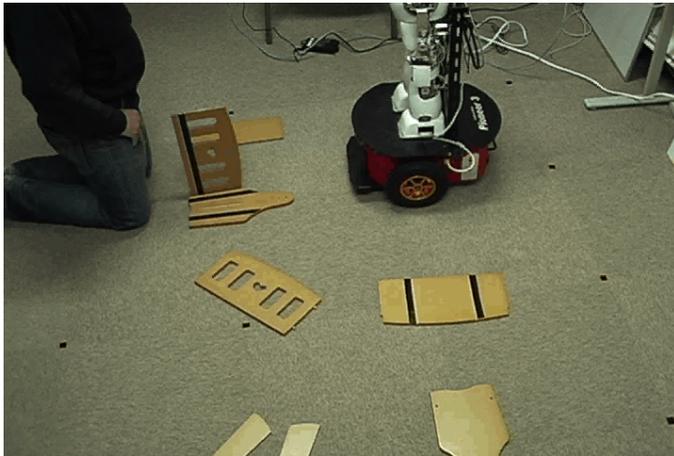
# Homography の応用



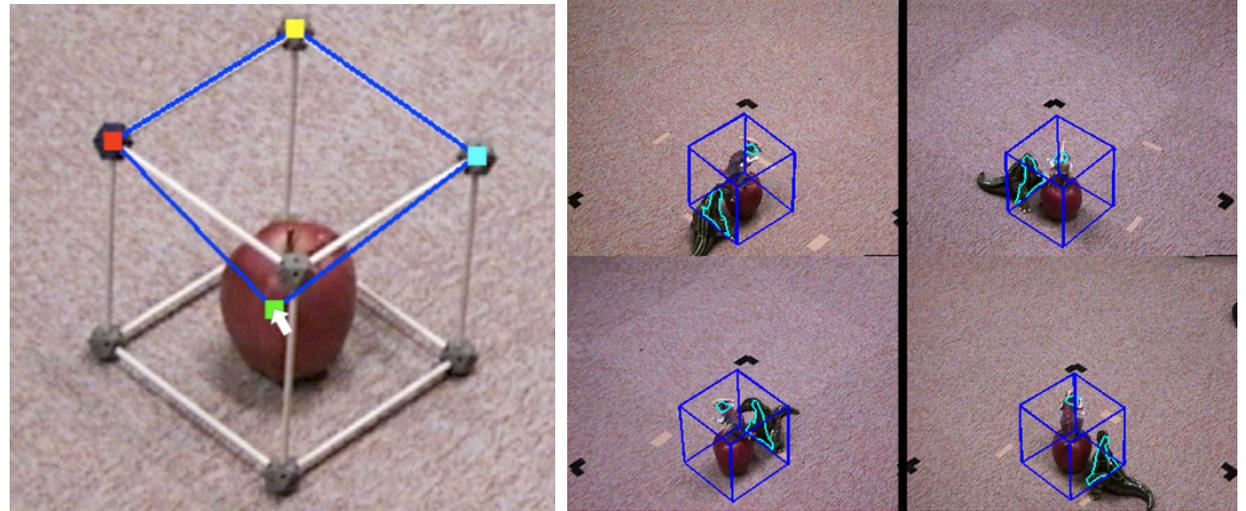
装着型プロジェクタ



絵画修復シミュレーション



ロボットを用いた遠隔指示



侵入検知



# Factorization Method (2)

## ■ 平行投影による1点の投影

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad r: \text{像面の配置 (カメラの向き)}$$

## ■ 多視点(F)・多特徴点(P)へ拡張 $I=RS$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1P} \\ y_{11} & \cdots & y_{1P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{F1} & \cdots & x_{FP} \\ y_{F1} & \cdots & y_{FP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx1} & r_{yx1} & r_{zx1} \\ r_{xy1} & r_{yy1} & r_{zy1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{xxF} & r_{yxF} & r_{zxF} \\ r_{xyF} & r_{yyF} & r_{zyF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_P \\ Y_1 & \cdots & Y_P \\ Z_1 & \cdots & Z_P \end{bmatrix}$$

# Factorization Method (3)

- 2F行P列の行列Iのランクは3 → 特異値分解

$$I = U\Sigma V$$

$$R' = U'[\Sigma']^{1/2}$$

$$S' = [\Sigma']^{1/2} V'$$

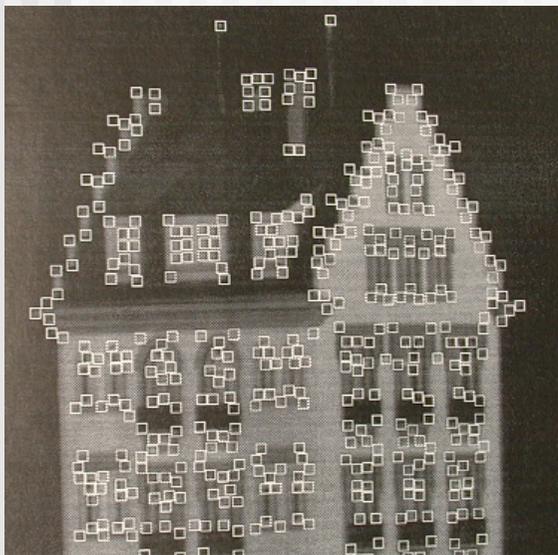
$U'$ :  $U$  の2F行3列の左部分行列

$\Sigma'$ :  $\Sigma$  の3行3列の左上部分行列

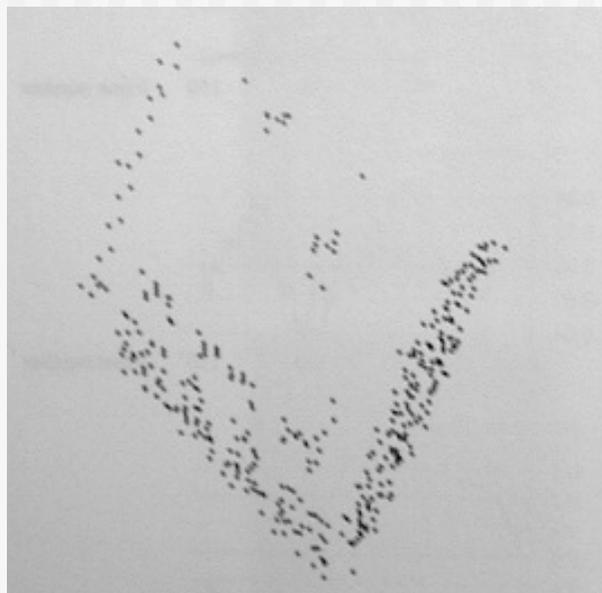
$V'$ :  $V$  の3行P列の上部分行列

# Factorization Method (3)

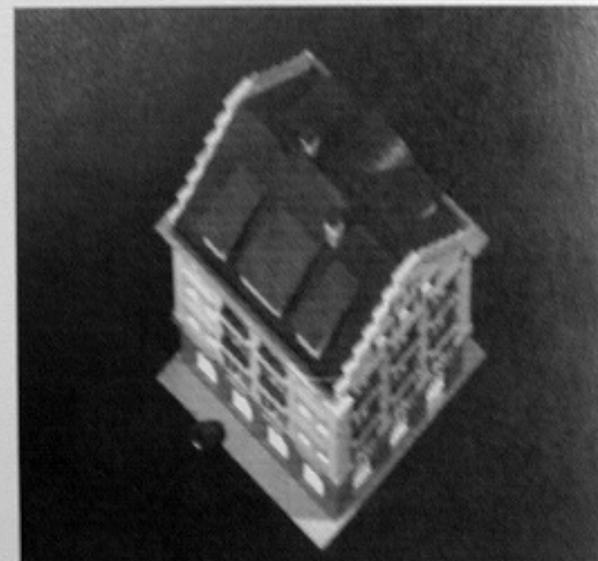
---



抽出された特徴点



特徴点の座標plot



テクスチャマッピング