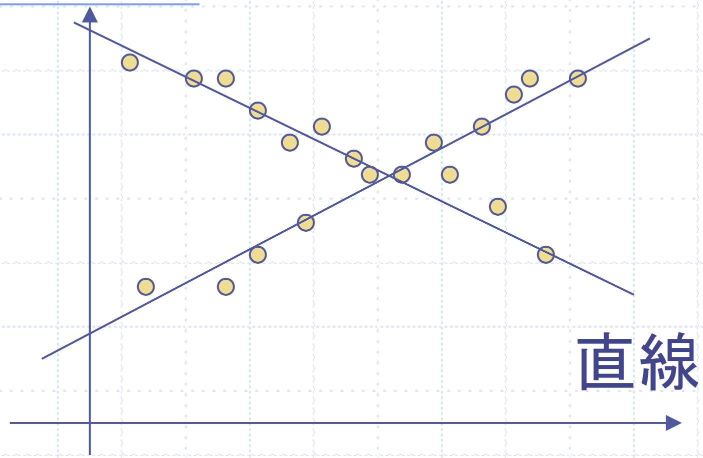
画像認識のための統計学
−分類，最適化，モデル化−

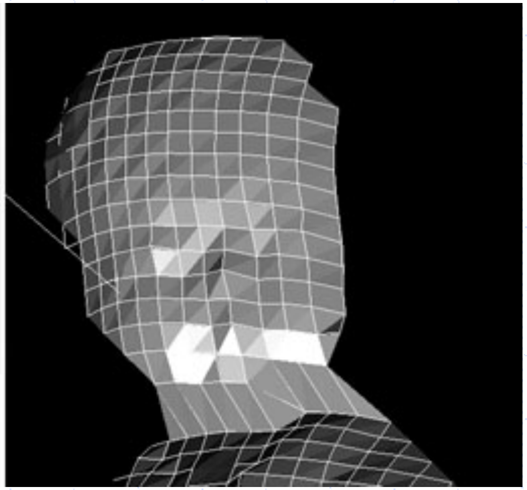
画像における統計学

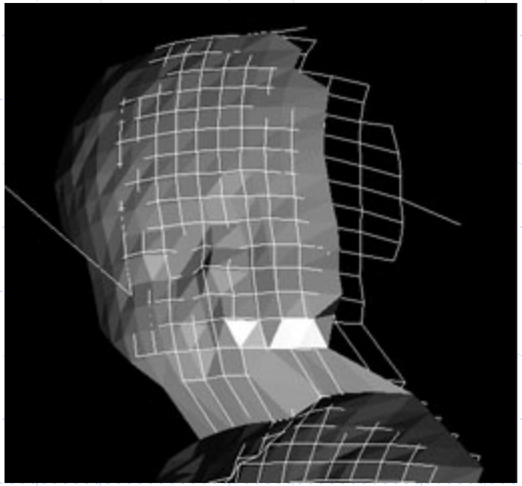
- モデル当てはめ
  - エッジ解析・距離画像の平面分割
  - 物体の姿勢推定・運動計測
- 分析・解析
  - センサ設計
  - 情報圧縮
- 分類・判定
  - 文字認識・人物認識
  - 物体認識・不良品の検出

モデル当てはめ



直線の検出・当てはめ

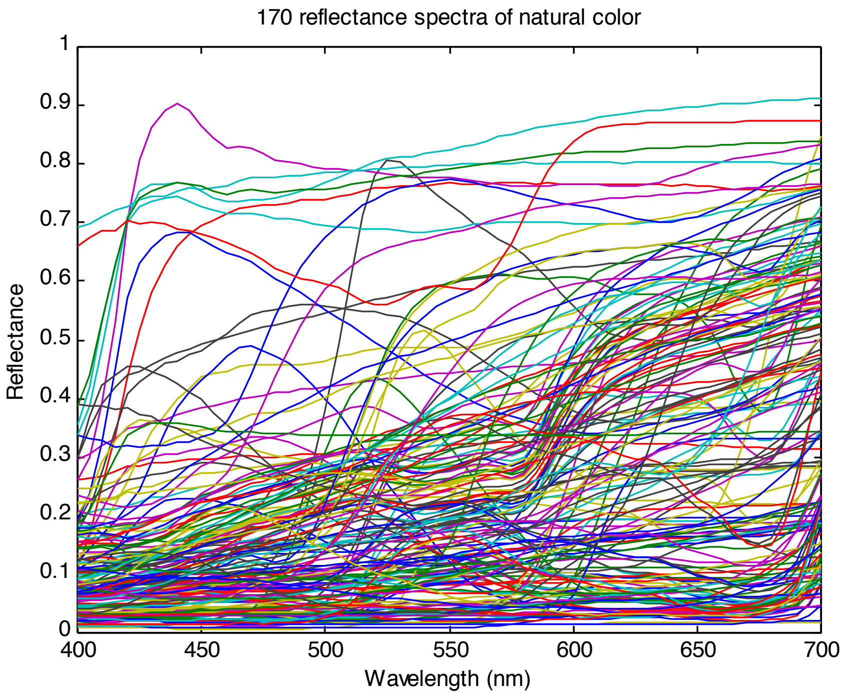


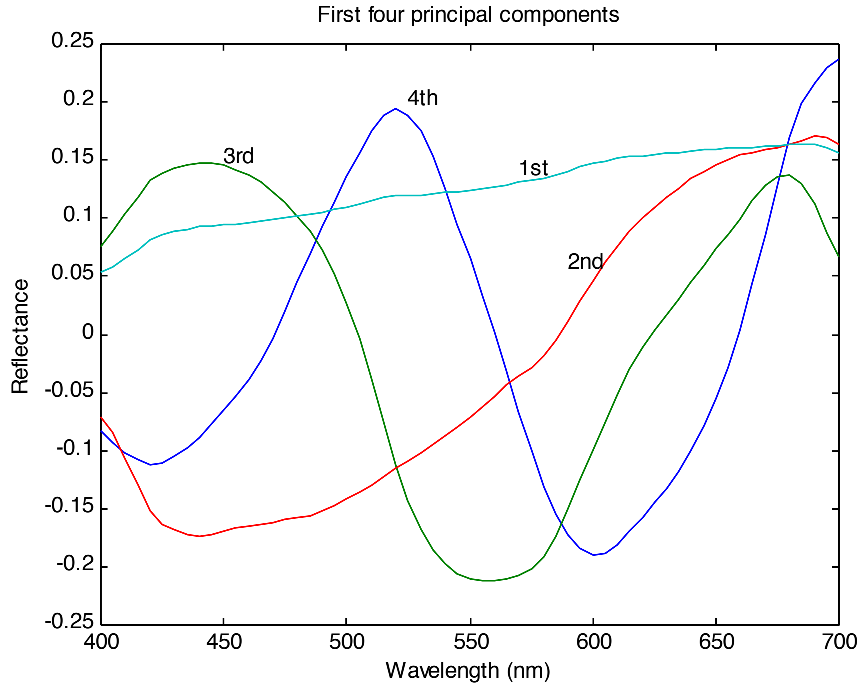


対象モデル　　初期姿勢の距離画像　姿勢推定結果

分析・解析

自然界の分光反射率サンプル　主成分分析　主成分（第１～第４）





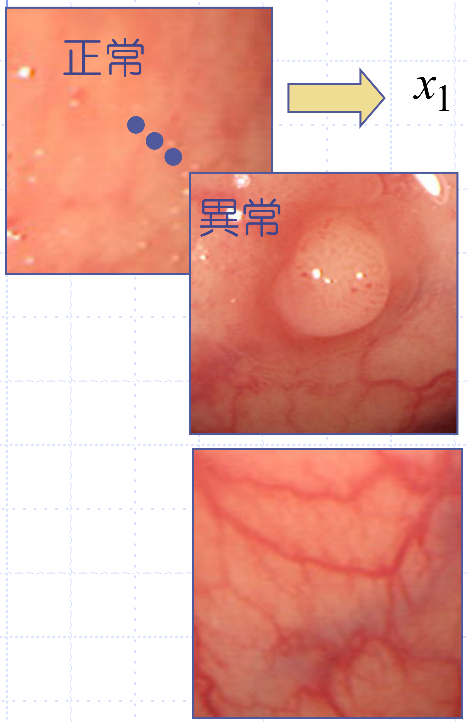
$$r(\lambda) \approx \sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i(\lambda)$$

低い次元数で元の信号を表現できる.

分類・判定

例）内視鏡画像からの自動診断

診断のついている
画像群



$x_1 \quad x_2$

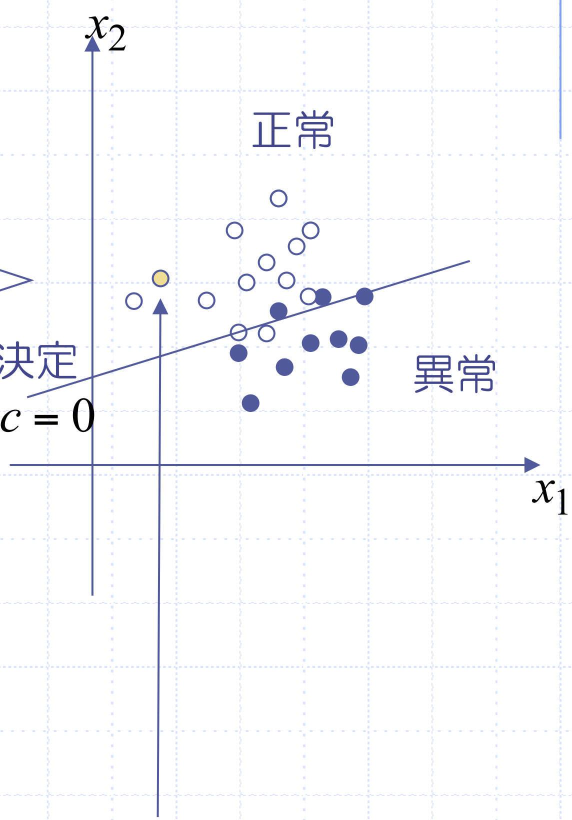
$x_1 \quad x_2$

画像から特徴量x1，x2
（色，形など）を抽出

プロット

判別関数を決定

$ax_1 + bx_2 + c = 0$



新しい画像がきたとき：
① 特徴量を算出
② 判別関数により，正常，異常を判断.

方法論（1）規範による分類

- モデル当てはめ
  - 回帰分析
    - 最小二乗法
    - 重回帰分析
- 分析・解析
  - 因子分析
  - 主成分分析
  - 独立成分分析
- 分類・判定
  - 判別分析
  - ニューラルネット

方法論(2)技法による分類

- 最適化・最小化
  - 線形算法(最小二乗法，主成分分析 ・・)
  - 非線形最適化(最急降下法，GA，SA，・・)
- 座標変換
  - 正規直交変換(主成分分析，判別分析・・)
  - 一次変換(独立成分分析)
  - 非線形変換(ニューラルネット，正規化距離・・)

単回帰分析

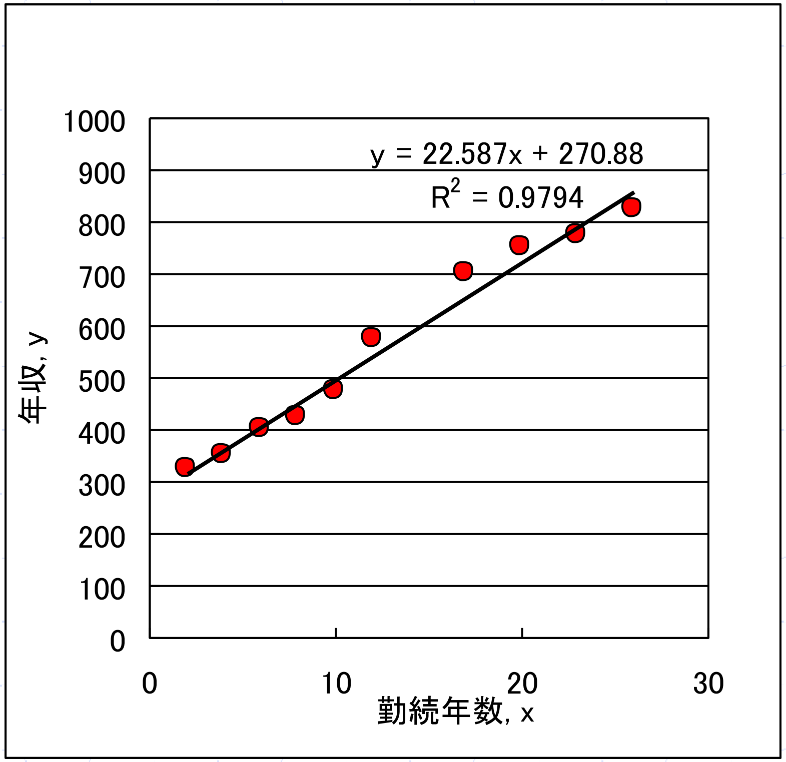
１つの変数ｘから，１つの変数ｙを推定する.

例）　勤続年数と年収の関係を分析する.
直線で関係式を表現する.

$$y = ax + b$$

x：説明変数
y：目的変数

勤続年数, x	年収, y
2	325
4	350
6	400
8	425
10	475
12	575
17	700
20	750
23	775
26	825



最小二乗法

- モデル，データ
  - 回帰モデル　$y = ax + b$
  - データ　$(x_i, y_i), i = 1,\ldots,N$
- 規範
  - 残差平方和　$S = \Sigma (y_i - a x_i - b)^2$ を最小にする
- 算法
  - S は a,b の二次式なので，dS/da=0, dS/db=0

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - ax_i - b)\cdot(-x_i) = -\sum_{i=1}^{N} 2(y_i x_i - a{x_i}^2 - bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - ax_i - b)\cdot(-1) = -\sum_{i=1}^{N} 2(y_i - ax_i - b) = 0$$

最小二乗法の行列解法

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2} + b\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2} & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \end{bmatrix}}$$

共分散行列

$$ax_i + b = y_i$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = \underbrace{(\overbrace{A^T A}) ^{-1} \overbrace{A^T B}}$$

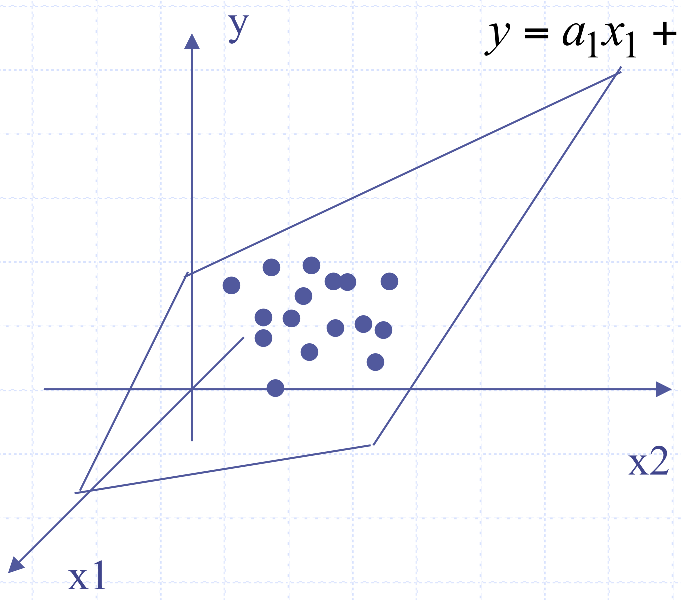
Aの擬似逆行列

重回帰分析

２つ以上の変数ｘ１，ｘ２，．．．から，１つの変数ｙを推定する.

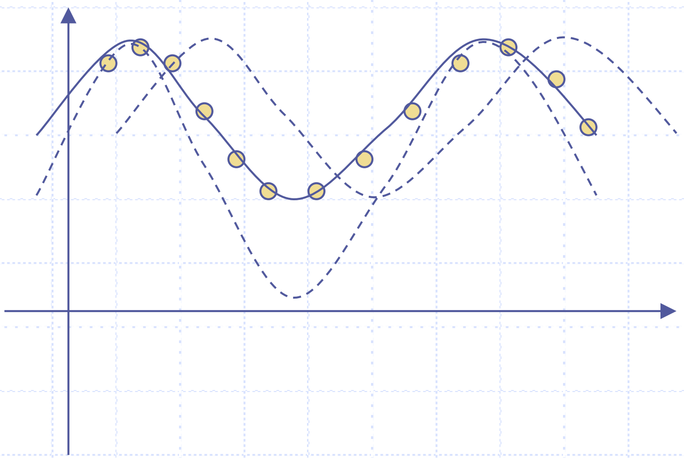
例） 最低気温（ｙ）と緯度（ｘ１），標高（ｘ２）の関係

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3$$



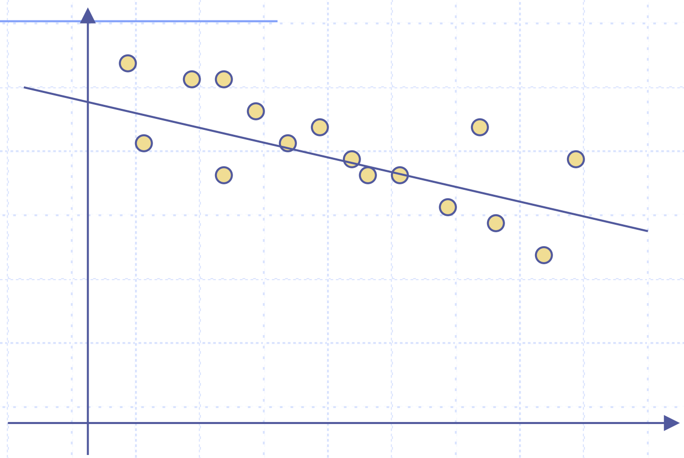
各地のデータ（サンプル）から回帰係数a1,a2,a3を決定する.

線形回帰分析

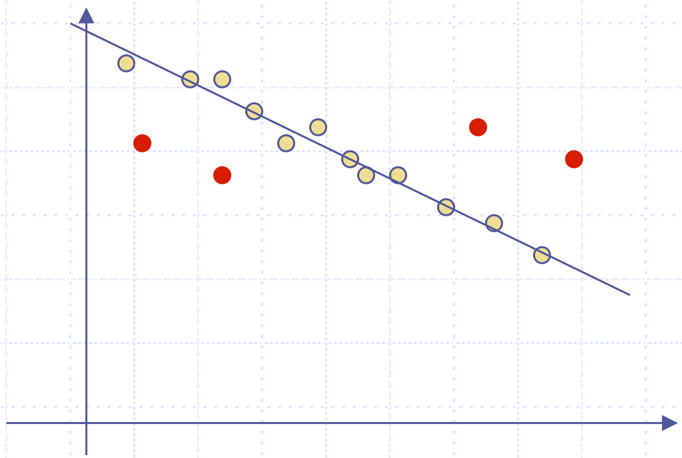


- 線形な例
  - y = ax + b
  - y = ax^2 + bx + c
  - z = ax + by + c
  - y= a sin(θ +b) + c = asin θ cosb+cos θ sinb+c
- 非線形な例
  - y=sin(ax)+b
  - 非線形最適化によりパラメータを出す.
    最急降下法, GA, SA, . . .

ロバスト統計



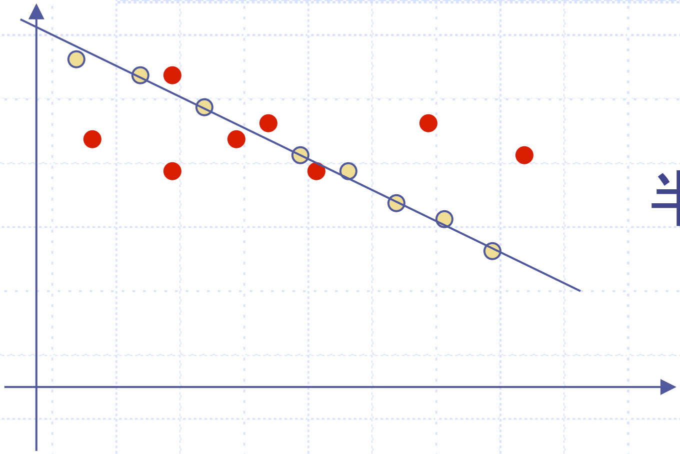
通常の最小二乗法



外れ値を考慮した方法

- 外れ値(outlier)を考慮したモデル当てはめ
  - LMedS (Least Median Squares)
  - M-推定法
  - RANSAC (Random Sample Consensus)

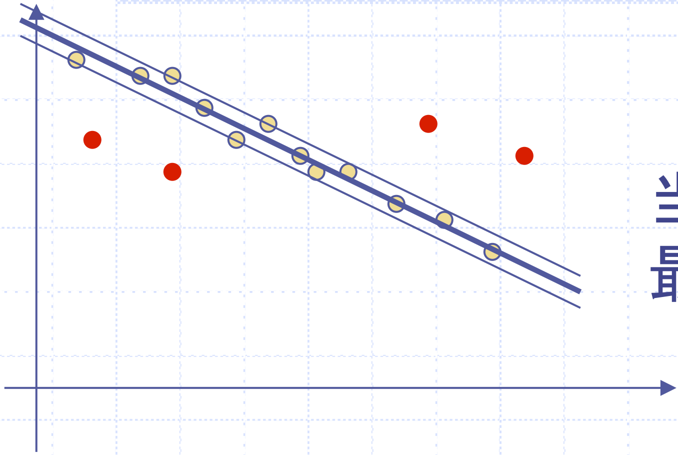
LMedS



半数のデータで最小化

- 残差の中央値(Median)を最小化
  - 50% までが outlier でも問題なし
  - 解析的算法は困難
    確率的手法(ランダムサンプリング等)を利用
    - 1. 適当にデータを選択，モデル当てはめ
    - 2. メディアンの値を求める
    - 3. 1,2 を繰り返し，メディアンが最小となるものを選択

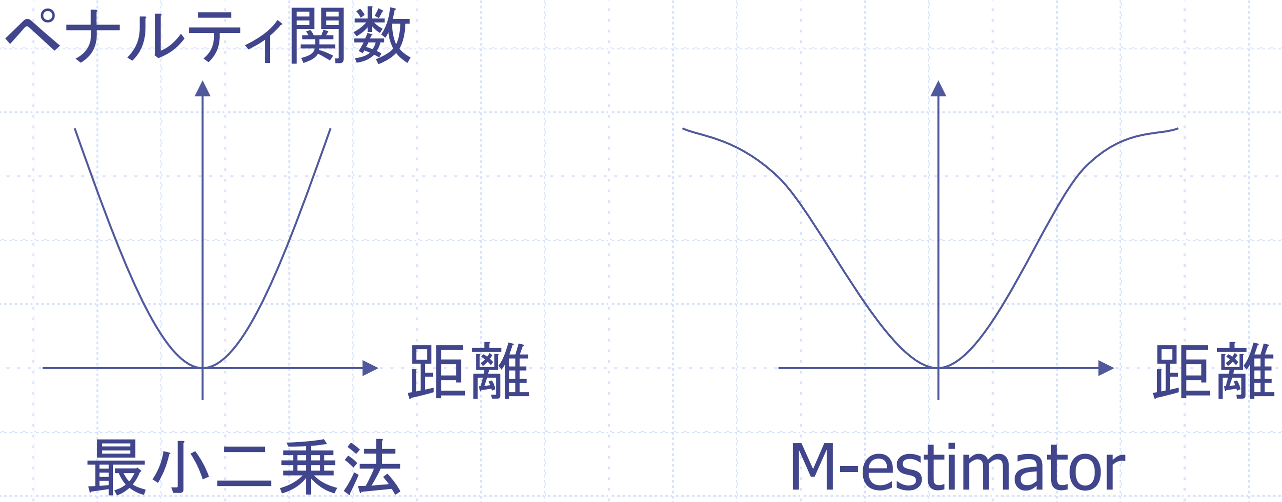
RANSAC



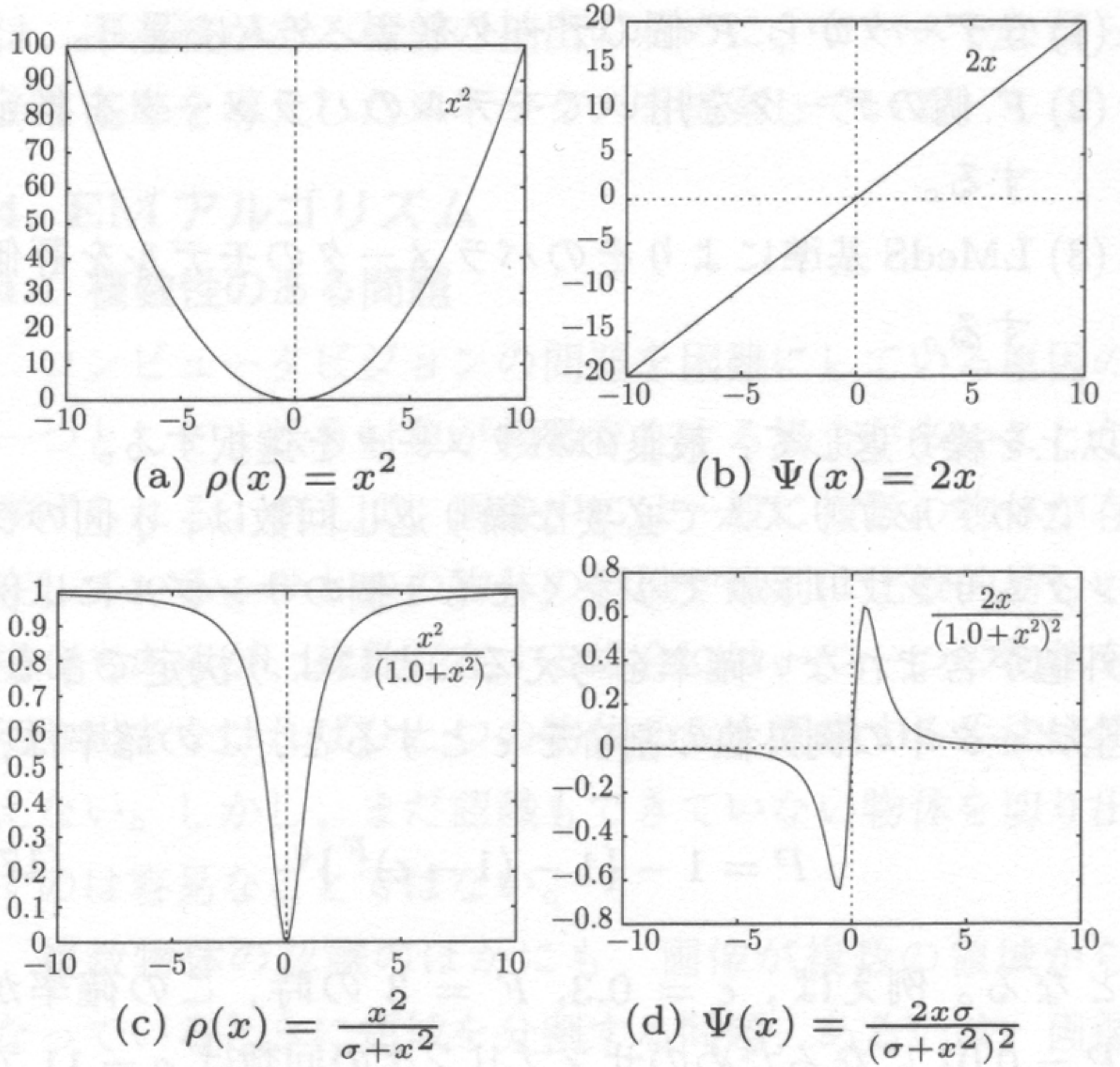
当てはまるデータ数の
最大化

- 残差がしきい値以内のデータの個数を最大化
  - outlier が 50% 以上でも動く
  - 解析的算法は困難
    確率的手法(ランダムサンプリング等)を利用
    - 1. 適当にデータを選択, モデル当てはめ
    - 2. 誤差しきい値内のデータの個数を求める
    - 3. 1,2 を繰り返し, しきい値内のデータの個数が最大となるものを選択

M推定(M-estimator)



- 最小二乗法は外れ値に弱い
  - 外れ値の重みを軽減



(a) $\rho(x) = x^2$

(b) $\Psi(x) = 2x$

(c) $\rho(x) = \frac{x^2}{\sigma + x^2}$

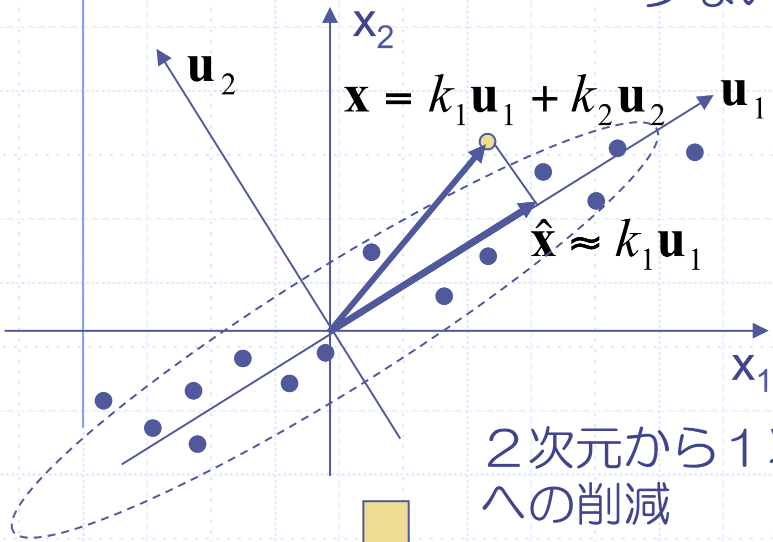
(d) $\Psi(x) = \frac{2x\sigma}{(\sigma + x^2)^2}$

主成分分析

互いに相関のある多種類の変数を，互いに無相関な少数個の変数に要約する．

⇩

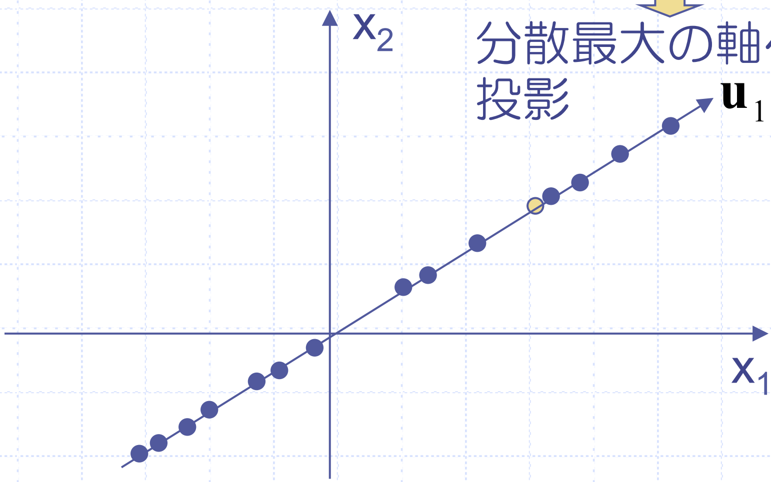
少ない次元数で解析，圧縮などを行う．



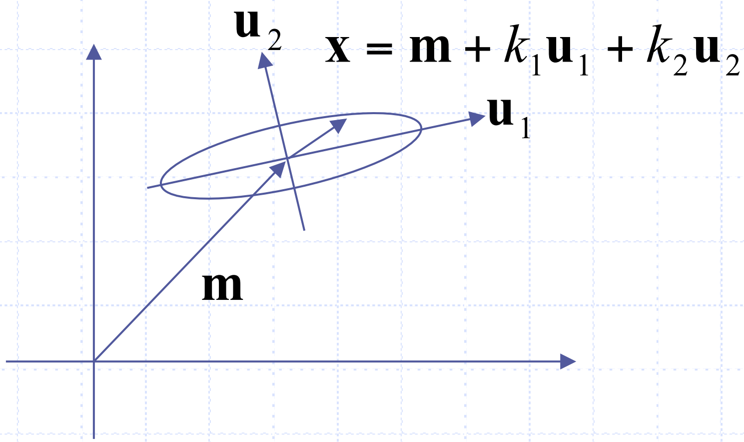
$\mathbf{u}_1$：サンプルの分散が最大の方向
$\mathbf{u}_2$：２番目に分散が大きい方向
（２変数の場合は，分散が最小の方向）

２次元から１次元への削減

分散最大の軸への投影



サンプルの平均が０でない場合

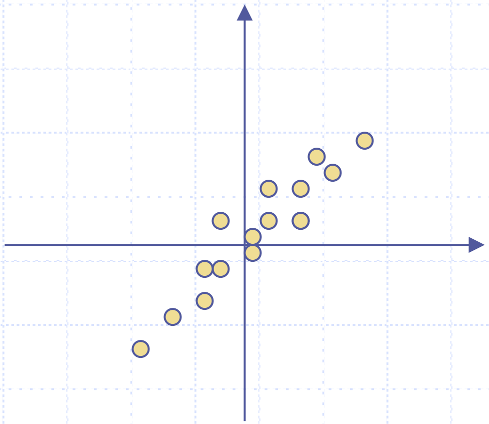


共分散と相関

共分散行列　　各変数とも，平均を0にしてから相関を計算して得られる行列

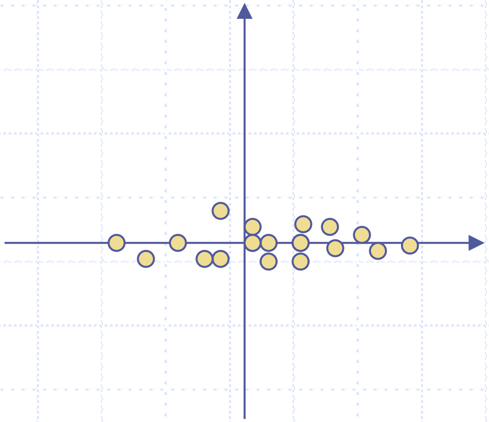
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_i (x-\bar{x})^2 & \frac{1}{n}\sum_i (x-\bar{x})(y-\bar{y}) \\ \frac{1}{n}\sum_i (x-\bar{x})(y-\bar{y}) & \frac{1}{n}\sum_i (y-\bar{y})^2 \end{bmatrix}$$

(例１）　２変数間に相関がある場合



$$\begin{bmatrix} \sigma_x{}^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y{}^2 \end{bmatrix}$$

(例２）２変数間に相関がない場合



$$\begin{bmatrix} \sigma_x{}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y{}^2 \end{bmatrix}$$

主成分の方向$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$を求める

方針

２変数間で相関が０になる方向，
すなわち<u>共分散行列が対角行列になる</u>
方向を求めればよい．

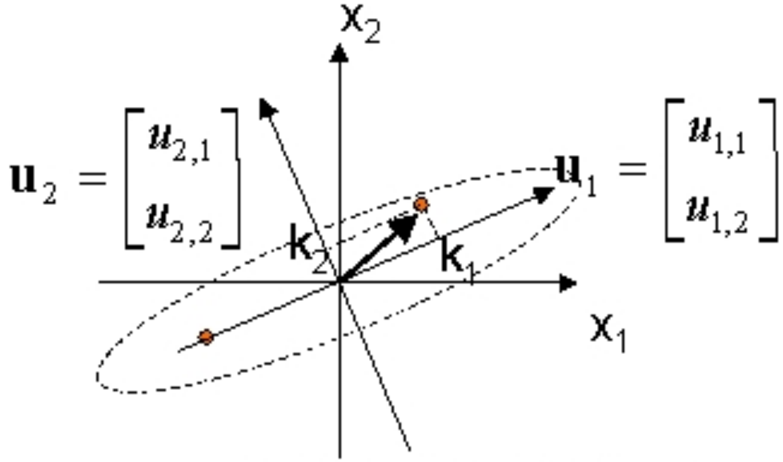
上記の条件を満足する，正規直交
基底ベクトルを$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$とする．

この２つの基底ベクトルを用いた座標
変換は以下のように表される．

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \cdots(1)$$

またはベクトル表現で

$$\mathbf{k} = \mathbf{U}\mathbf{x} \qquad \text{ただし} \qquad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]^T$$



$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$: 正規直交基底ベクトル

Uで変換した後の共分散行列$\mathbf{C}_k$は

$$\mathbf{C}_k = \langle \mathbf{k}\mathbf{k}^T \rangle = \langle \mathbf{U}\mathbf{x}(\mathbf{U}\mathbf{x})^T \rangle$$
$$= \mathbf{U}\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle \mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{C}\mathbf{U}^T \qquad \cdots(2)$$

両辺に$\mathbf{U}^{-1}$を右からかけて
左右入れ替えると

$$\mathbf{C}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}_k \qquad \cdots(3)$$

主成分の方向を求める（つづき）

Uの正規直交性より

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1} \quad \cdots(4)$$

よって（３）式は

$$\mathbf{C}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{C}_k$$

共分散の対角化が**U**によってなされるとすると

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad \cdots(5)$$

成分に分けて表すと

$$\mathbf{C}\,[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

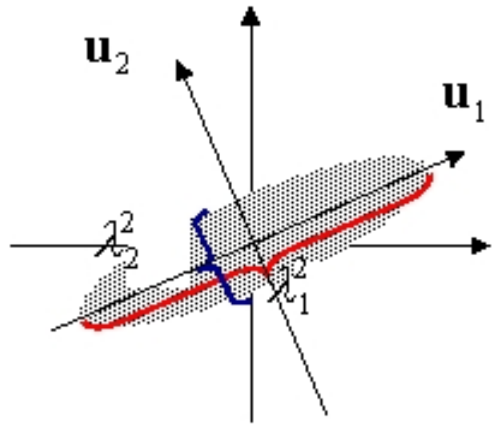
または

$$\mathbf{Cu}_1 = \lambda_1^2\mathbf{u}_1, \mathbf{Cu}_2 = \lambda_2^2\mathbf{u}_2$$

これは，もとのデータの共分散行列**C**に対する固有値問題に他ならない．

すなわち，$\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$は行列**C**の固有ベクトル，λ_1^2,はλ_2^2固有値として求められる．

固有値λ_i^2は対角化されたデータの各変数の分散を与える．

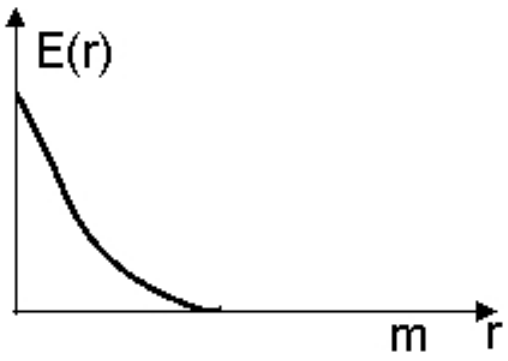


近似による誤差と累積寄与率

主成分を，分散の大きい順に番号付けしたものならば，誤差

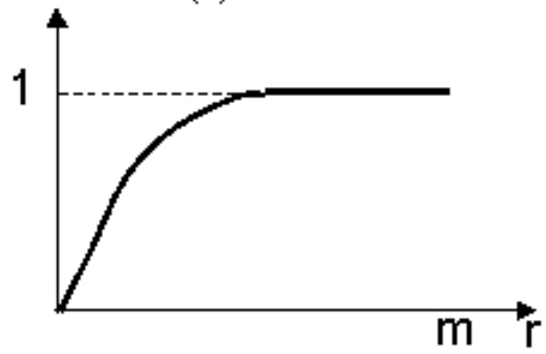
$$E(r) = \sum_{i=r+1}^{m} \langle k_i^2 \rangle = n \sum_{i=r+1}^{m} \sigma_i^2$$

は， r に関して単調減少関数となる

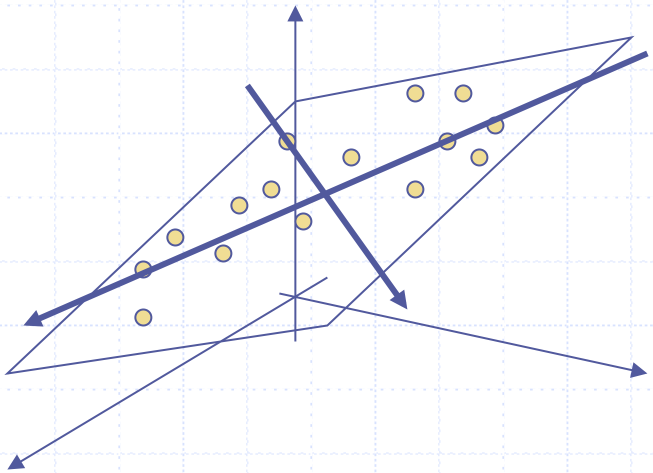


逆に，はじめのr個の成分でどのくらい正確に，もとの分布を表せるかの尺度として，以下に示す累積寄与率がある.

$$累積寄与率(r) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}$$

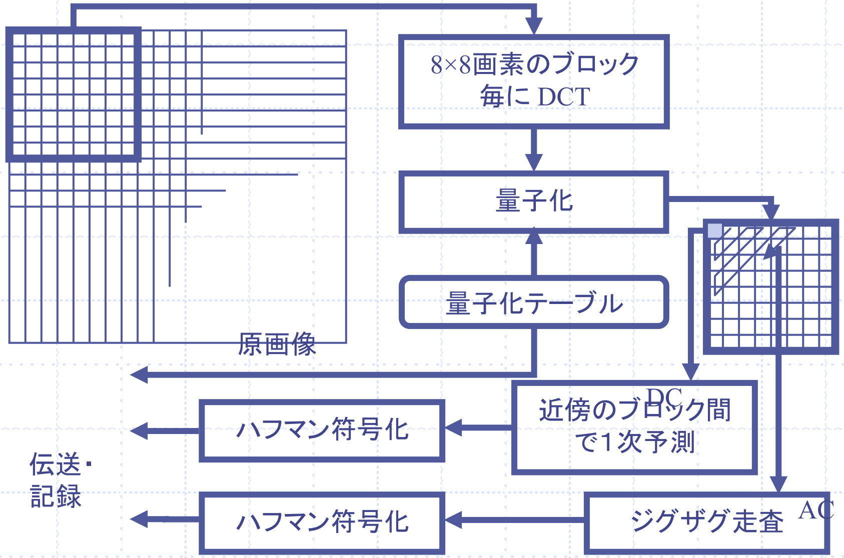


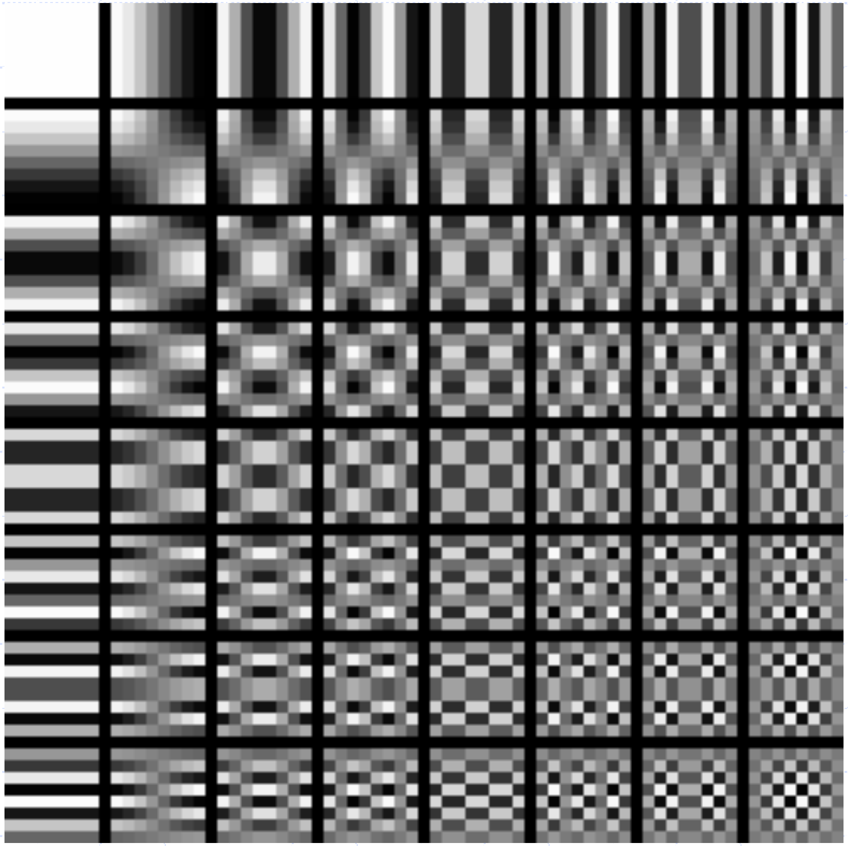
固有空間法



- 主成分軸への変換は，KL変換
  - KL変換は正規直交変換
  - 部分空間は，元の空間のよい近似
  - 距離計算を高速化することが可能
  - 判別分析などと併用可能

直交変換





離散コサイン変換の基底

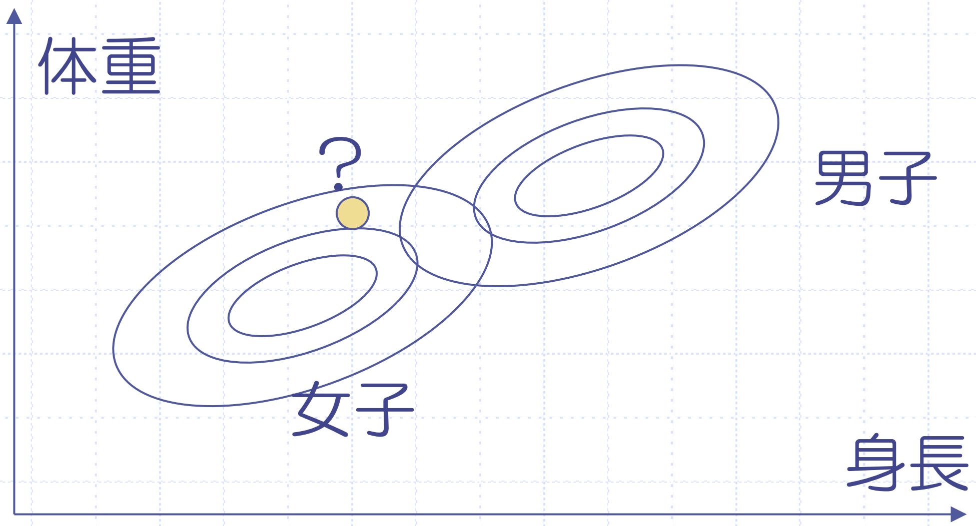
$$F(u,v)=\frac{4C(u)C(v)}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right)\cdot\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right)$$

ただし $C(i)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & i=0\\ 1 & i=1,2,\ldots,N-1\end{cases}$

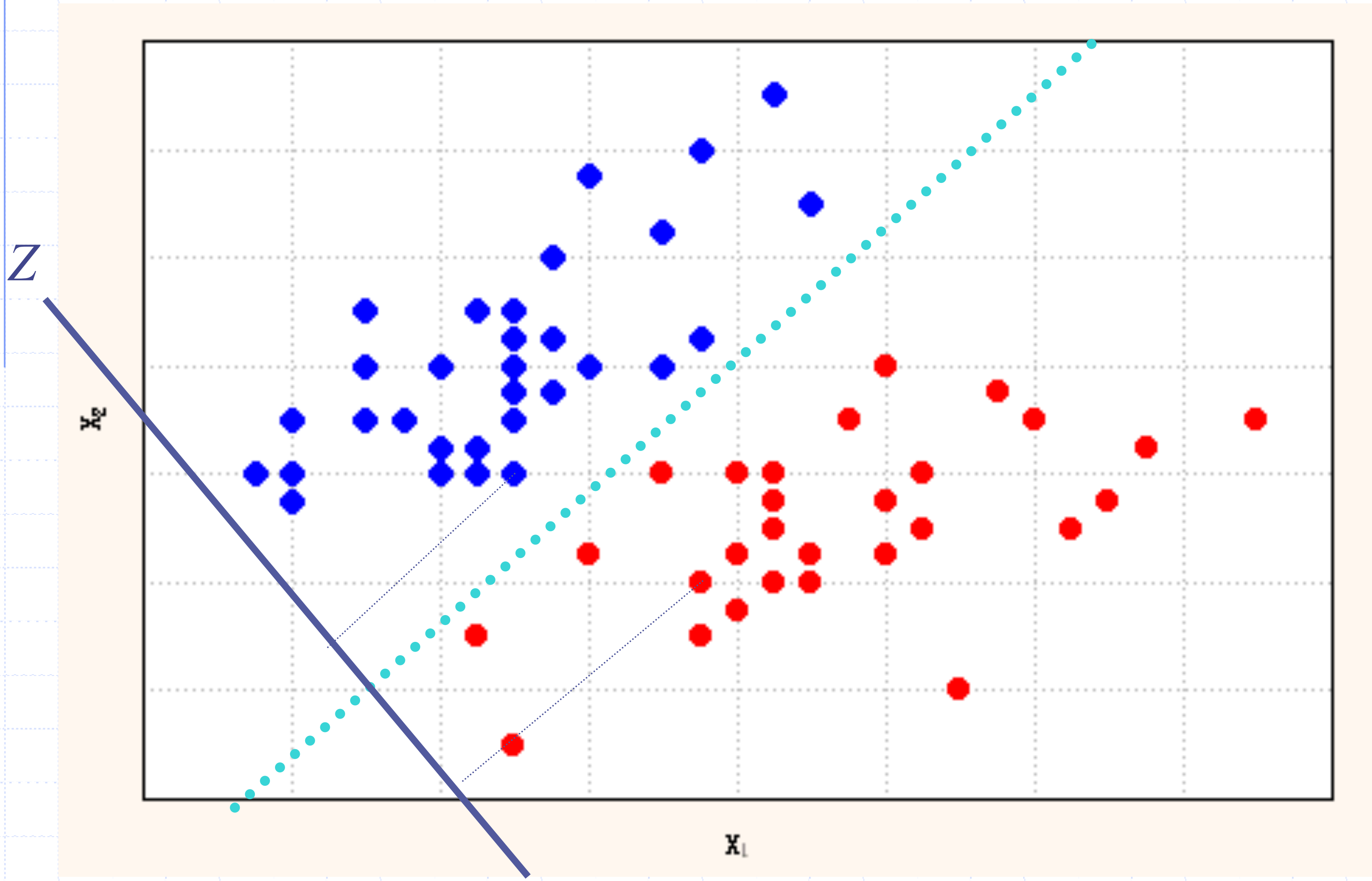
判別分析

２つ以上の群（クラスとも呼ぶ）が存在し，それぞれの群の観測値の統計的性質（平均や共分散）がわかっているとする．
この条件のもとで，あるテストサンプルの観測値からそのサンプルがどちらの群に属するか，判別したい．

例）男子学生の身長，体重，女子学生の身長，体重の統計的分布がわかっているとする．このとき，あるテスト学生の身長，体重からその学生の性別を推定したい．



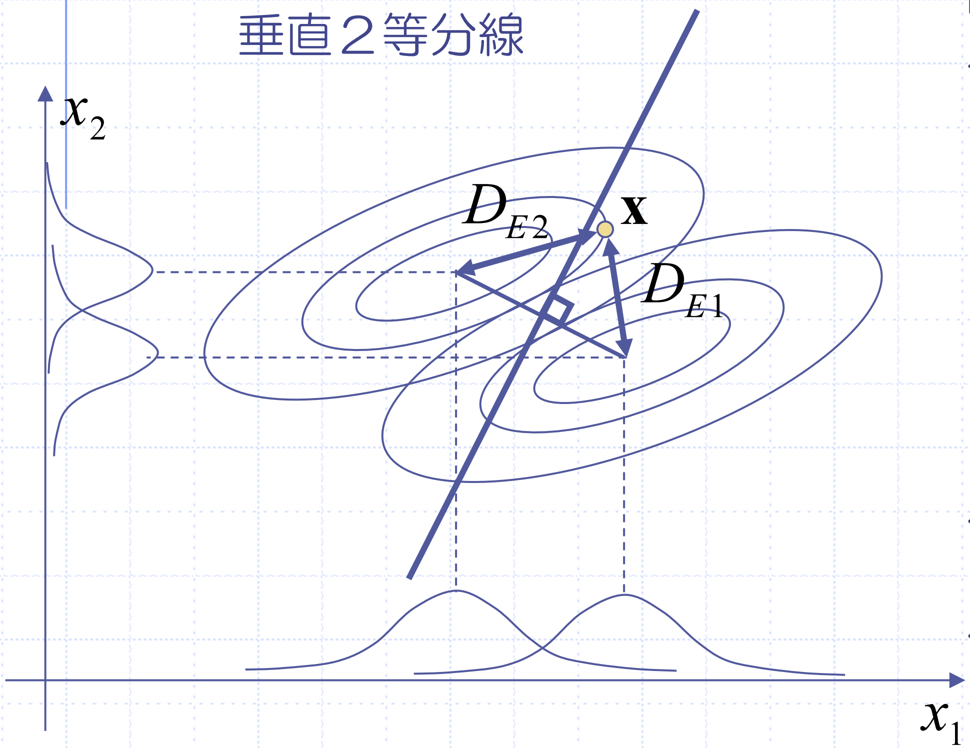
線形判別



群の分散と判別関数

単純なユークリッド距離で判別することにすると．．．

母平均を結ぶ線分の
垂直２等分線



図において，観測値ベクトルxの点は
ユークリッド距離では

$$D_{E1} < D_{E2}$$

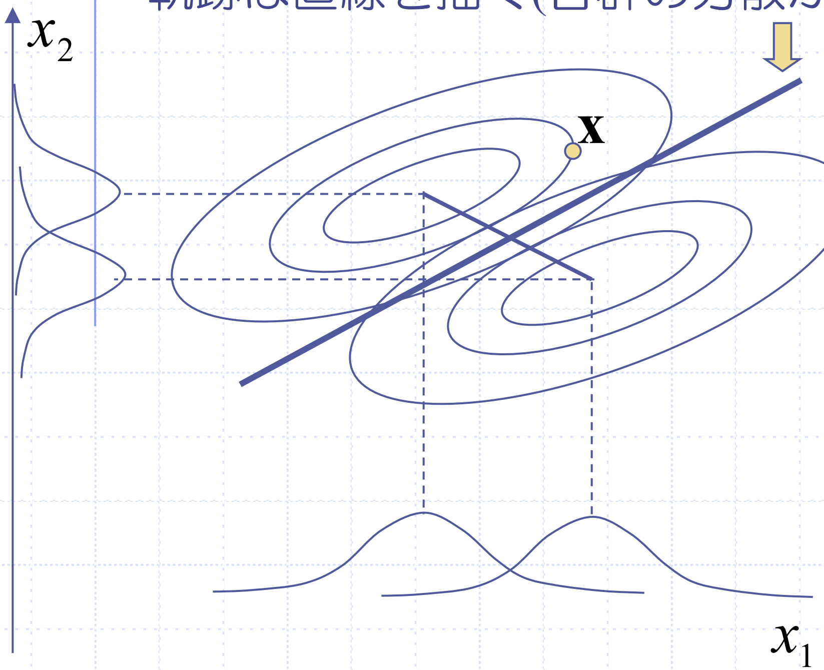
となり，G1に分類される．
しかし，実際の生起確率は

$$p_2(\mathbf{x}) > p_1(\mathbf{x})$$

であり，G2に分類すべきである．
このように，単純なユークリッド距離
では望ましい判別ができない．

マハラノビス距離による線形判別

マハラノビス距離で等距離になる
軌跡は直線を描く(各群の分散が同じ場合)



直線の方程式は

$$\delta_1 = m_{11} - m_{21}$$

$$\delta_2 = m_{12} - m_{22}$$

$$\overline{m}_1 = \frac{m_{11} + m_{12}}{2}$$

$$\overline{m}_2 = \frac{m_{21} + m_{22}}{2}$$

として,

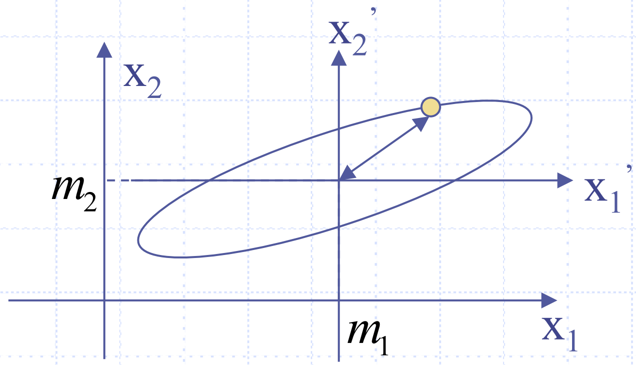
$$f(x_1, x_2) \equiv (\sigma_{11}\delta_1 + \sigma_{12}\delta_2)(x_1 - \overline{m}_1) + (\sigma_{21}\delta_1 + \sigma_{22}\delta_2)(x_2 - \overline{m}_2) = 0$$

と書ける（証明後述）.

$f(x_1,x_2)$は判別関数（discriminant function）
と呼ばれる.

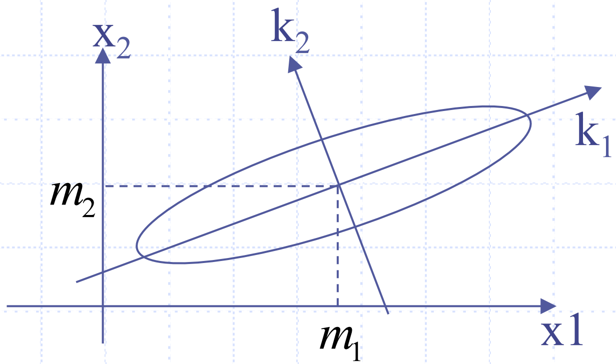
マハラノビス距離

一般に，２変数のマハラノビス距離は以下のステップで変換した座標系におけるユークリッド距離で与えられる.



１．平均を０にする.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{m}$$

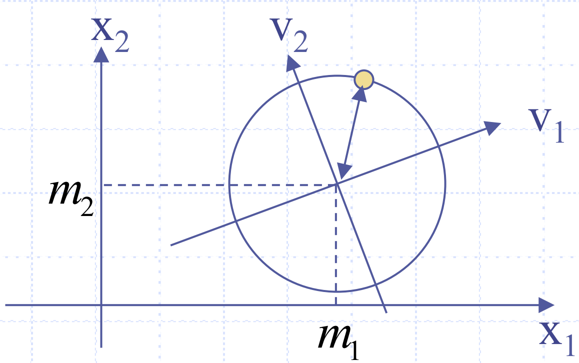


２．座標系を回転して（Hotelling変換）主成分の方向を新しい軸とする.

$$\mathbf{k} = \mathbf{U}\mathbf{x}'$$

３．各主成分を，それぞれの標準偏差で割って正規化する（白色化：whitening).

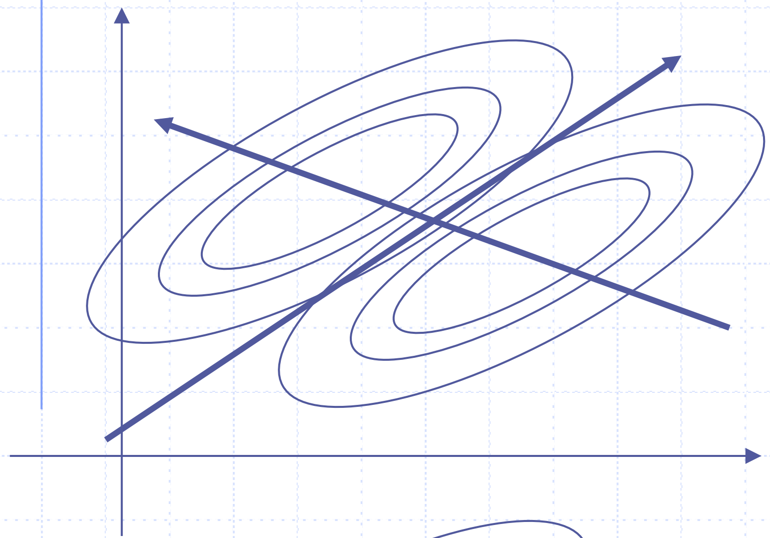
$$\mathbf{v} = \mathbf{C}_k^{-1/2}\mathbf{k}$$

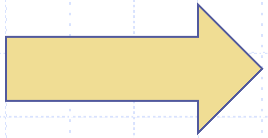


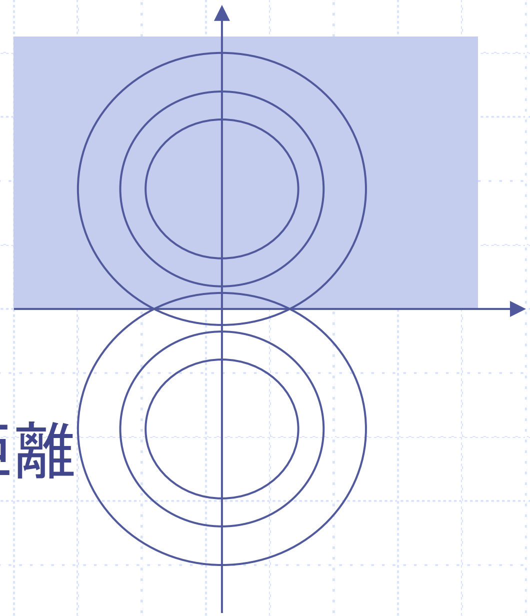
４．新しい座標系でのユークリッド距離を算出する.

$$D^2 \equiv \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T\mathbf{v}$$

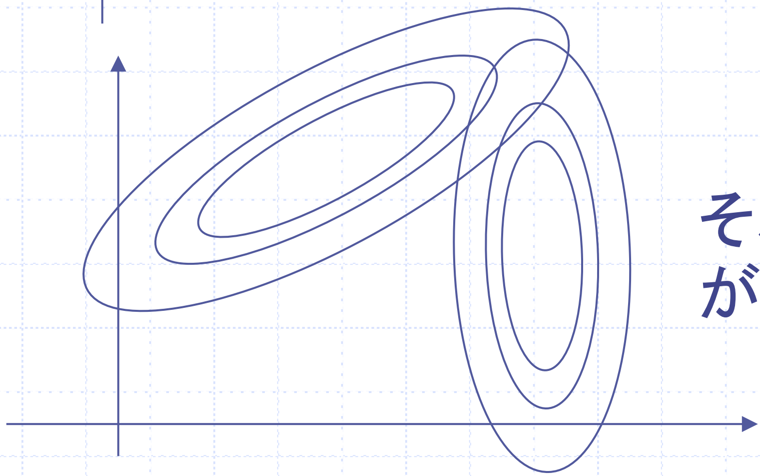
線形判別と座標変換







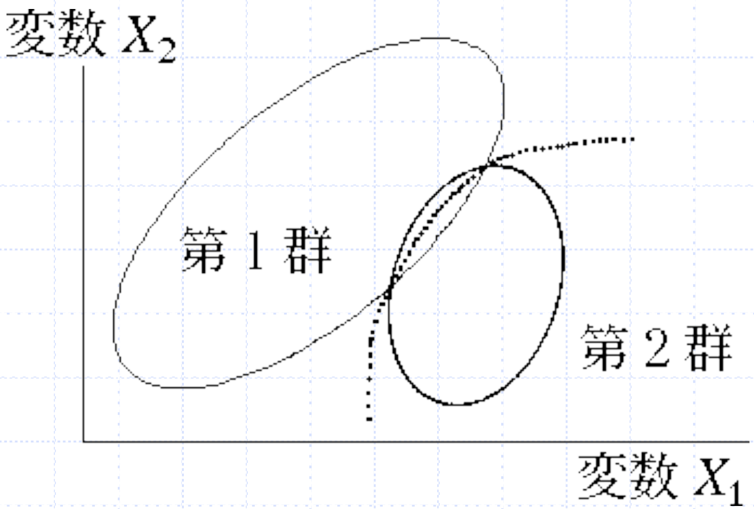
各群の
マハラノビス距離
を正規化



それぞれの群の共分散
が異なる場合は？

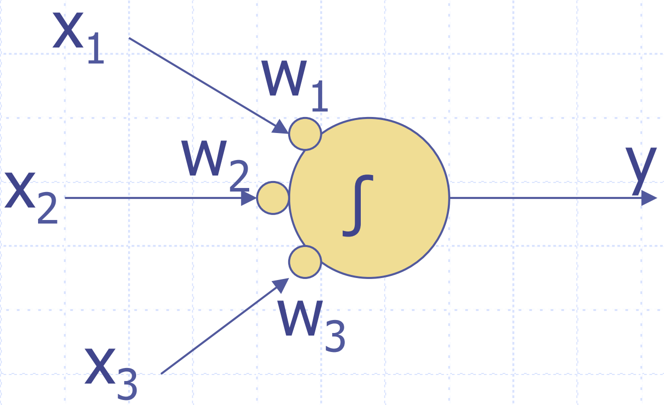
各群の分散が異なる場合

- 判別境界
  - 等生起確率となる点をつないだ曲面
  - 各群からのマハラノビス距離を計算，最小となる群を選択



ニューラルネット

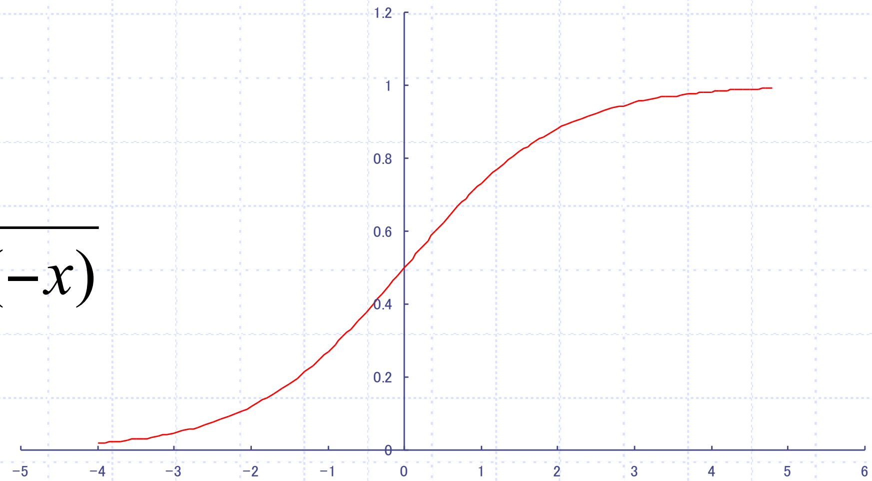
ユニット



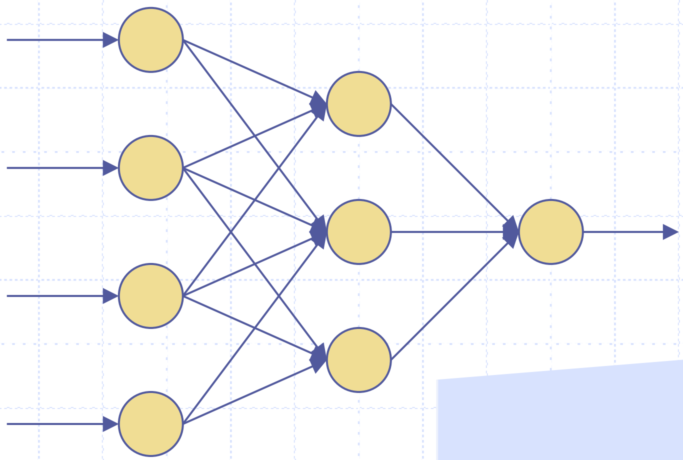
$$y = f\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)$$

シグモイド関数の例

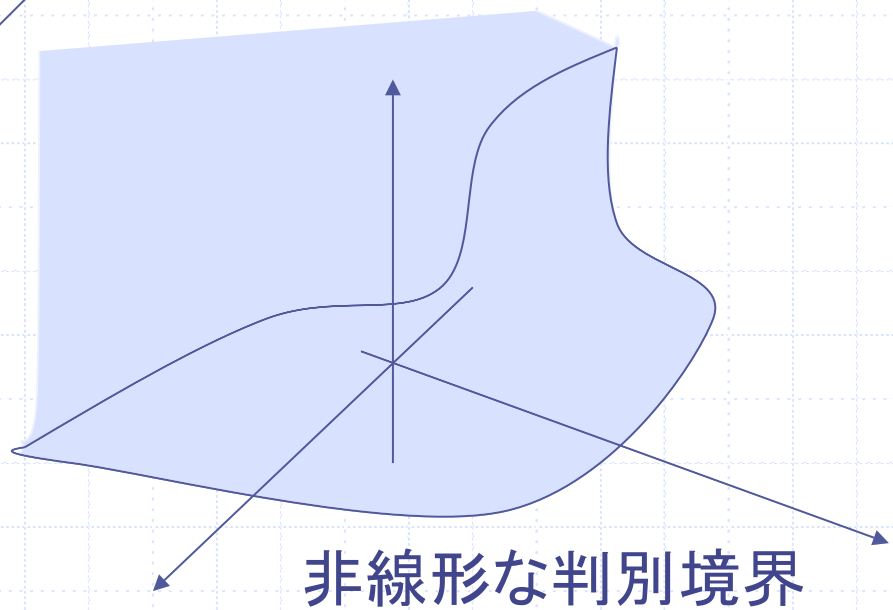
$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$



パーセプトロン



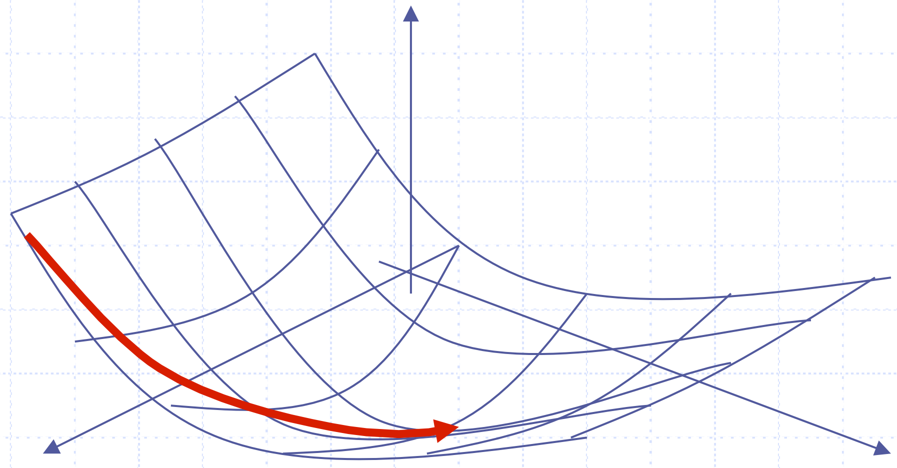
- 入力層，中間層，出力層の3層構造
- 確率的な学習法



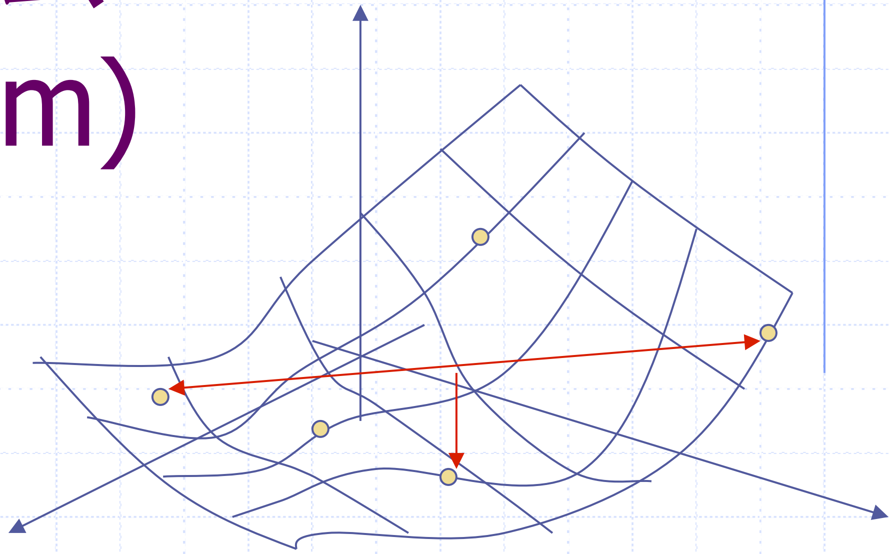
非線形な判別境界

非線形最適化

- 非線形関数の最小値を求める問題
  - 単峰性か，多峰性か？
    →極小解を避ける工夫
- 最急降下法
  - 各軸方向の勾配に基づき，最も急な方向に移動
  - 極小に陥りやすい



遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm)



- GAの三要素
  - 交差(掛け合わせ)
  - 選択(自然淘汰)
  - 突然変異
- 遺伝子のコーディングが重要
  - 離散的問題にも向いている
    - 例:巡回セールスマン問題(組み合わせ最適化)